

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2021

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2021-10-29 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$|18 - 4x| = 4$$

$$\text{Svar: } x = \frac{7}{2} \text{ eller } x = \frac{11}{2}$$

- b) Lös olikheten

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$\text{Svar: } 2 < x < 5$$

- c) Partialbråksuppdelning

$$\frac{10x + 6}{x^2 - 2x}$$

$$\text{Svar: } -\frac{3}{x} + \frac{13}{x-2}$$

3 p

2. Lös olikheten

$$|x - 3| + 2 \geq |5 - x|$$

Svar: $x \in \mathbb{R}$ (Alla reella x -värden duger)

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $\ln x^2 = \ln 36 - 2 \ln 3$

Ledning: Logaritmlagar ger $x = \pm 2$

b) $\sin x = \sin 2x$

Ledning: "Sinus för dubbla vinkeln" och faktorisering till "nollprodukt" ger

$$x = n\pi \text{ eller } x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

c) $\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$

Ledning: Substitution $t = \tan x$ ger andragradsekvation med dubbelroten $t = 1$ vilka är känt tangens-värde för vinklarna:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

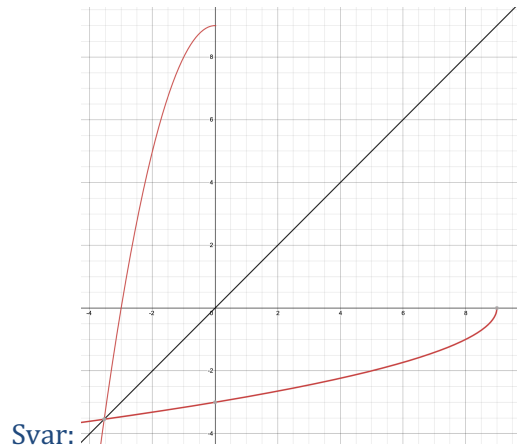
3 p

4. Låt $y = f(x) = 9 - x^2$ för $x \in]-\infty, 0]$

- a) Bestäm inversen $y = f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängd och värdemängd.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = -\sqrt{9 - x} \text{ med } D_{f^{-1}} =]-\infty, 9] \text{ och } V_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$$

- b) Skissa tydliga grafer till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$iz^2 + 16 = 0$$

Ledning: De Moivre ger rötterna $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + n\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$
vilka skrivs om till rektangulär form $z = \pm 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$

b) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$z^2 + (6 + 4i)z - 20 + 12i = 0$$

Ledning: Kvadratkomplettering ger $z = -3 - 2i \pm 5$

c) Förenkla uttrycket så långt som möjligt

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2$$

Ledning: Exempelvis Eulers formler och "trigettan" ger $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$

3 p

6. Lös ekvationen

$$z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32 = 0$$

Ledning: Rotgissning ger $z = 2i$ och tack vare reella koefficienter hos polynomet även konjugatet $z = -2i$. Polynomdivision med tillhörande faktorer ger en andragsgradsfaktor som kvadratkompletteras och man får de återstående två rötterna
 $z = 2 \pm 2i$.

3 p