

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2021

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2022-01-04 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$2|2 - x| = |8 - x|$$

Svar: $x = -4$ eller $x = 4$

- b) Lös ekvationen

$$\sqrt{8 - x} = x + 12$$

Svar: $x = -8$

- c) Partialbråksuppdelning

$$\frac{5x - 17}{x^2 - 7x + 12}$$

Svar: $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-4}$

3 p

2. Lös olikheten

$$\frac{2x - 8}{x + 2} \leq \frac{x - 5}{x + 1}$$

Svar: $x \in]-2, -1[\cup [1, 2]$

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$3 \ln x - \ln 4 = \ln x^2$$

Ledning: Logaritmlagar ger $x = 4$

b)

$$\sin x = \sin 2x$$

Ledning: "Sinus för dubbla vinkeln" och faktorisering till "nollprodukt" ger
 $x = n\pi$ eller $x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

c)

$$\arctan \frac{3}{4} = \arcsin \frac{3}{x}$$

Ledning: Hjälptriangel ger $x = 5$

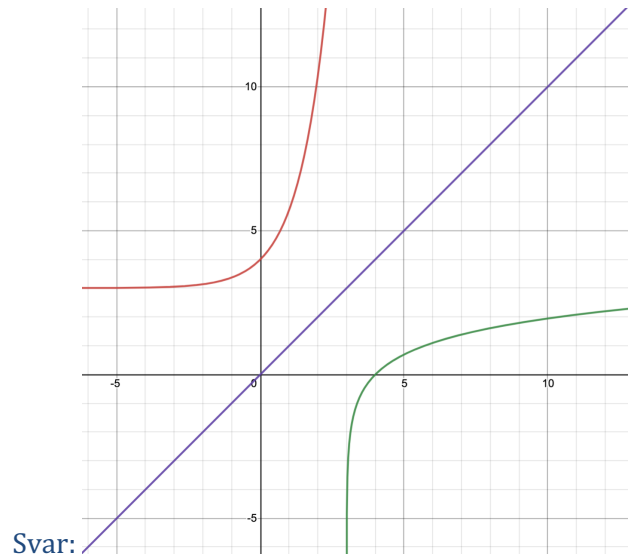
3 p

4. Låt $y = f(x) = e^x + 3$

- a) Bestäm inversen $y = f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = \ln(x - 3)$ med $D_{f^{-1}} =]3, \infty[$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

b) Skissa tydliga grafer till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$4z^3 + 32i = 0$$

Ledning: De Moivre ger rötterna $z = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{n2\pi}{3})}$, $n \in \mathbb{Z}$
vilka skrivs om till rektangulär form till $z_0 = 2i$, $z_{1,2} = \pm\sqrt{3} - i$

b) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$4z - 36i = 2\bar{z} + 24$$

Svar: $z = 12 + 6i$

c) Markera i det komplexa talplanet

$$|z - 4i| = |z - 8i|$$

Svar: Den vågräta linjen $y = 6$ för $y = \text{Im } z$ och $x = \text{Re } z$

3 p

6. Polynomekvationer

- a) Vad vet man om polynomekvationer med *reella koefficienter*?

Svar: Deras rötter är alltid *reella rötter* eller *parvis konjugerade ickereella rötter* – totalt lika antal rötter (lika eller olika) som polynomets grad.

- b) Lös polynomekvationen och svara på formen $x + iy$

$$z^2 + (4 - i)z + 5 - 5i = 0$$

Svar: $z_1 = -1 + 2i$ eller $z_2 = -3 - i$

3 p