INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2022

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2022-10-28 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen

$$|5-2x| = 20-3x$$

Ledning:

Två fall studeras på olika sidor om $x = \frac{5}{2}$ och man finner en lösning $x = 5$.

b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B + 2C + D = 13 \\ 2A + 3B + 2C + 2D = 22 \\ A + B + C - D = 2 \\ A + B + 3C + 2D = 20 \end{cases}$$

Ledning:

Gauss-elimination ger $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ och $D = 4$

c) Partialbråksuppdela

$$\frac{7x+9}{x^2+3x}$$

Ledning:

Partialbråksuppdelning med ansats $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}$ ger det enklare bråken $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+3}$

3 p

2. Lös olikheten

$$14-x\geq\frac{4}{x-9}$$

Ledning:
Liknämnighet, gemensamt rationellt uttryck skriven som nollprodukt ger efter teckenstudie lösningsmängderna $x\in\,]-\infty,9[\,\cup\,[10,13]$

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x=\cos x$$

Ledning: Sambandet "sinus för dubbla vinkeln" och faktorisering till nollprodukt ger svaren $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ eller $x=\frac{\pi}{6}+n2\pi$ eller $x=\frac{5\pi}{6}+n2\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}$

b)

$$10^{2x}+9\cdot 10^{x}-10=0$$

Ledning: Variabelskifte $t=10^{x}$ ger $t=1$ eller $t=-10$ varav det första alternativet är OK och ger $x=0$

c)

$$2\ln x=\ln(2x+24)$$

Svar: Tredje logaritmlagen och invers till logaritmen ger andragradsekvationen $x^2-2x-24=0$ vars lösningar kontrolleras och endast $x=6$ är OK.

3 p

4. Låt

$$f(x)=\begin{cases}x+5 & ,\ a<x<b\\ 12-x & ,\ 6\leq x<10\end{cases}$$

a) Bestäm det lägsta värdet på a och högsta värdet på b för att $f(x)$ skall vara en omvändbar funktion med invers $f^{-1}(x)$.

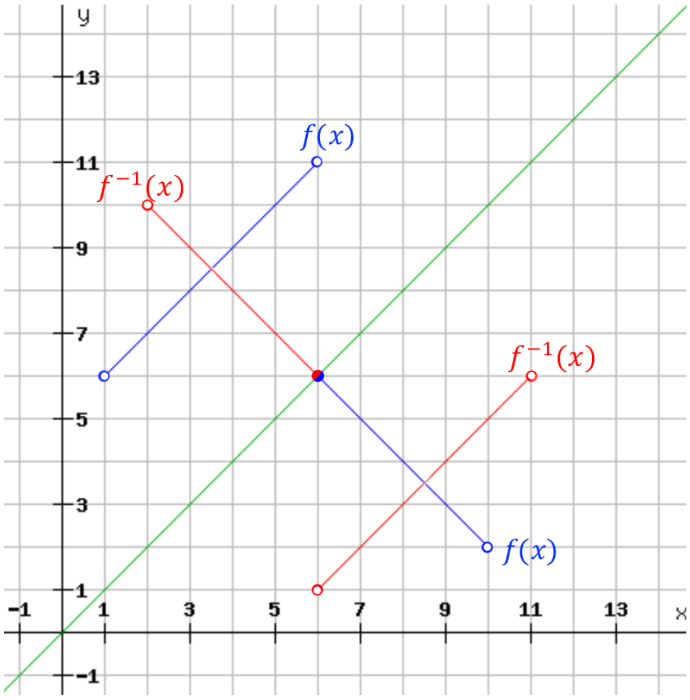
Svar: $a = 1$ och $b = 6$,

Notera att $-\infty$ inte är ett värde.

b) Bestäm $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängder.

Svar: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-5 & , \quad 6 < x < 11 \\ 12-x & , \quad 2 < x \leq 6 \end{cases}$

c) Skissa $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar: 

3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$2iz^3 = 54$$

Svar: $z = 3i$ eller $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ eller $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b)

$$|z - 4i| = |z - 8|$$

Svar: Linjen $y = 2x - 6$ med $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$

c)

$$z^4 + 29z^2 + 100 = 0$$

Svar: $z = \pm 2i$ eller $z = \pm 5i$

3 p

6. Lös ekvationen

$$(1 - i)z^2 - (12 + 4i)z - 13 + 21i = 0$$

Lösningstips: Division ledvis med $(1 - i)$ ger efter förlängning med nämnarens konjugat ekvationen

$$z^2 - (4 + 8i)z - 17 + 4i = 0$$

som kvadratkompletteras och man får icke-reellt högerled

$$\big(z - (2 + 4i)\big)^2 = 5 + 12i$$

Ersättning av parentesen med $x + iy$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

som efter studie av realdel, imaginärdel och absolutbelopp hos höger- och vänsterled ger $x = \pm 3$ och $y = \pm 2$ som efter insättning ger $z_1 = 5 + 6i$ eller $z_2 = -1 + 2i$

3 p