

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2022

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2023-01-03 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$|6 - 3x| = 10 - x$$

Lösningstips: Två fall på olika sidor om $x = 2$ ger svaren
 $x = -2$ eller $x = 4$

- b) Lös olikheten

$$4x - x^3 < 0$$

Lösningstips: Faktorisering till nollprodukt följt av teckenstudier ger intervallen
 $-2 < x < 0$ eller $x > 2$

- c) Partialbråksuppdelning

$$\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x + 1)}$$

Lösningstips: Ansatsen $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ ger partialbråken

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

3 p

2. Lös olikheten

$$x - 12 \geq \frac{4}{x - 9}$$

Lösningstips: Liknämnhet och faktorisering till nollprodukt följt av teckenstudier ger mängderna ger intervallen $8 \leq x < 9$ eller $x \geq 13$

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$3 \ln x - \ln 7x - \ln x = 0$$

Lösningstips: Tre logaritmlagar ger $\ln \frac{x^3}{7x^2} = 0$ med svaret $x = 7$

b)

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

Lösningstips: Variabelskiftet $t = 2^x$ ger en andragradsekvation vars ena rot är av intresse och ger $x = 3$

c)

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Lösningstips: Trigaretan ger $x \in \mathbb{R}$

3 p

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , a \leq x < \infty \\ x + 3 & , -\infty < x < 1 \end{cases}$$

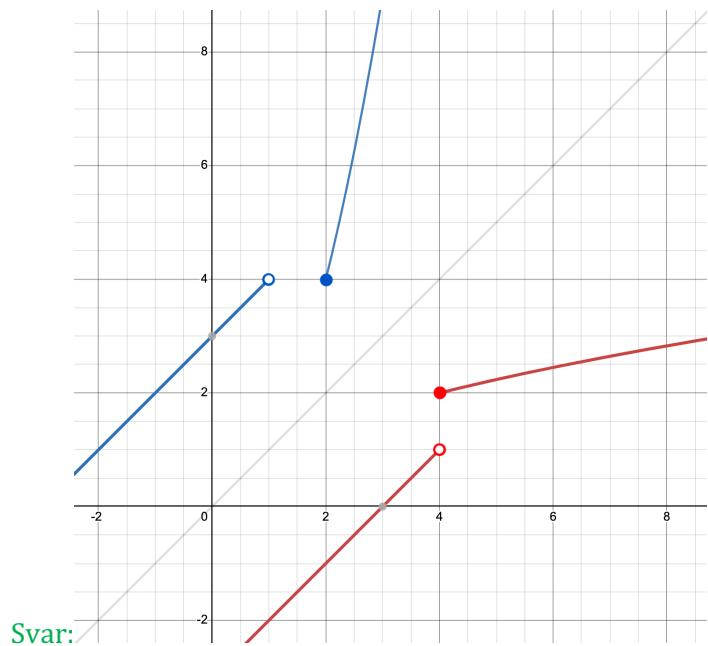
a) Bestäm det lägsta värdet på a om $f(x)$ skall vara en omvändbar funktion med invers $f^{-1}(x)$.

Svar: $a = 2$

b) Bestäm $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängder.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , 4 \leq x < \infty \\ x - 3 & , -\infty < x < 4 \end{cases}$$

c) Skissa $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$iz^2 + 25 = 0$$

Svar: $z = \pm \frac{5}{\sqrt{2}} \pm \frac{5}{\sqrt{2}}i$

b) Lös ekvationen och svara på formen $x + iy$

$$z^2 + (6 + 4i)z + 12i + 14 = 0$$

Svar: $z = -3 + i$ eller $z = -3 - 5i$

c) Förenkla uttrycket så långt som möjligt

$$2 \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}}{2i} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}}{2}$$

Lösningstips: Eulers formler och "sinus för dubbla vinkeln" ger

$$2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

3 p

6.

a) Bestäm vad som händer med absolutbelopp och argument hos z med funktionen

$$f(z) = (\sqrt{12} - 2i)z$$

Svar: Beloppet multipliceras med 4 och argumentet minskar $\frac{\pi}{6}$.

b) Bestäm V_f för funktionen

$$f(z) = \frac{i}{z^3}, \quad D_f = \text{utanför enhetscirkeln i 2:a kvadranten inklusive randen}$$

Svar: Innanför enhetscirkeln i första, andra och fjärde kvadranten inklusive randen

3 p