

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT 2022

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2023-08-22 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

Svar: Gissade rötter och polynomdivision med tillhörande faktorer ger $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,
 $x_3 = -2$ eller $x_4 = 3$

- b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \\ -2x + 2y - z = -8 \end{cases}$$

Svar: Successiv elimination ger $x = 10$, $y = 5$ och $z = -2$

- c) Lös olikheten

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x - 3} \geq 0$$

Svar: Faktorisering och teckenstudium ger $x \in [-5, -2] \cup]3, \infty[$

3 p

2. Lös olikheten

$$3|2 - x| + |x + 2| < 20$$

Svar: Studie av tre intervall ger $x \in]-4, 6[$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin x (1 + 2\cos x) = 0$$

$$\text{Svar: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi \text{ eller } x = n\pi \text{ då } n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$\sin^2 x + 6 \sin x + 8 = 0$$

Svar: Saknar reella rötter

c)

$$\lg(-5x) = 1 - \lg(-2x)$$

$$\text{Svar: } x = -1$$

3 p

4. Låt

$$y = f(x) = \ln(1 - x)$$

- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

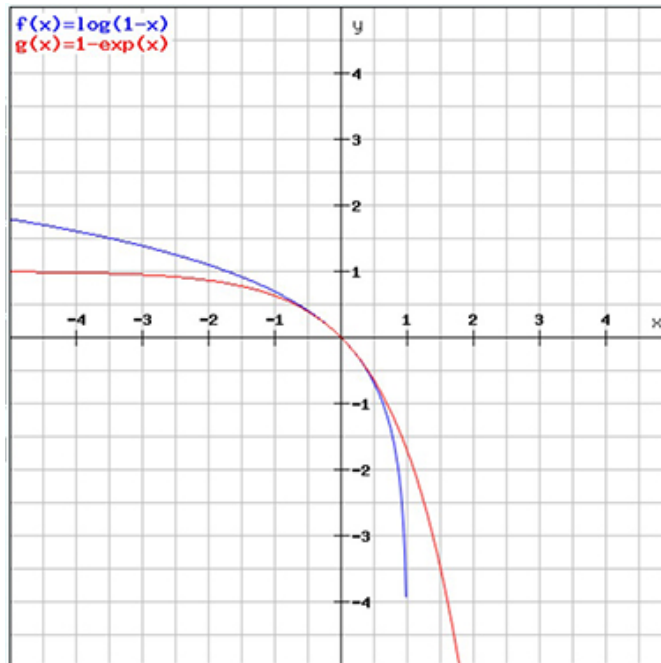
$$\text{Svar: } D_f \in]-\infty, 1[\text{ och } V_f \in]-\infty, \infty[$$

- b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = 1 - e^x \quad D_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[\text{ och } V_{f^{-1}} \in]-\infty, 1[$$

- c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitionsmängder och värdemängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Bestäm z^8 om

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Svar: $z^8 = 1$

- b) Lös ekvationen:

$$|z + 4 - 3i| = 2$$

Svar: Lösningen motsvarar en cirkel med radien $r = 2$ och centrum i punkten $(-4, 3)$ och ekvationen $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

- c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$2z^4 = -32$$

Svar: $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ eller $z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

3 p

6. Lös ekvationen $z^2 - (4 + 8i)z - 17 + 4i = 0$

Svar: Ersättning med $z = a + bi$ ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

Detta genom studie av realdel, imaginärdel och absolutbelopp hos högerled och vänsterled.

Insättning av $a = \pm 3$ och $b = \pm 2$ ger därefter $z_1 = 5 + 6i$ eller $z_2 = -1 + 2i$

3 p