INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2023

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2024-08-27 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y-z=3 \\ x-y+z=-9 \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$

b) Lös olikheten:

$$\frac{x^2-9}{x-2} \geq 0$$

Lösningstips: Faktorisering och teckenstudie ger $x \in [-3,2[\cup [3,\infty[$.

c) Förklara vad *snittet av två disjunkta mängder* motsvarar.

Svar: Två disjunkta mängder är detsamma som två åtskilda mängder och snittet (överlappningen) blir därmed *tomma mängden*.

3 p

2.

a. Lös olikheten

$$\left|x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right| > 0$$

Lösningstips: Absolutbeloppet är större än noll för alla x-värden förutom parentesens nollställen då det blir lika med noll.
Nollställena finner man exempelvis genom variabelskiftet $t = x^2$ följt av kvadratkomplettering:
$x = \pm 1$ eller $x = \pm \frac{1}{2}$
Svaret blir ”alla reella tal förutom dessa nollställen” – alltså
$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$.

b. Kommentera följande implikationen nedan – är den rätt/fel och varför?

$$x \in [40, 60] \Rightarrow x \in \left]30, 70\right[$$

Lösningstips: Om en person är 40 till 60 år gammal (inklusive gränserna) medför det att personen garanterat är inom åldersintervallet 30 till 70 år – därmed är påståendet korrekt, även om det ger ”sämre precision”.

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

Lösningstips: Sinus för dubbla vinkeln och faktorisering ger
$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi \;,\; n \in \mathbb{Z}$

b)

$$2\ln(x+3) = 0$$

Lösningstips: Tredje logaritmlagen och invers funktion ger en andragradsekvation $x^2 + 6x + 8 = 0$
med rötterna $x = -4$ eller $x = -2$ vara endast $x = -2$ duger.

c)

$$(e^x - 1)(x^2 - 25)(\ln(x-3))\left(\frac{\pi}{4} - \arctan x\right) = 0$$

Lösningstips: Ekvationen är redan faktoriserad och faktorerna har nollställena $x = 0, x = \pm 5, x = 4$ respektive $x = 1$ men logaritmens krav $x > 3$ gör att endast $x = 5$ eller $x = 4$ duger.

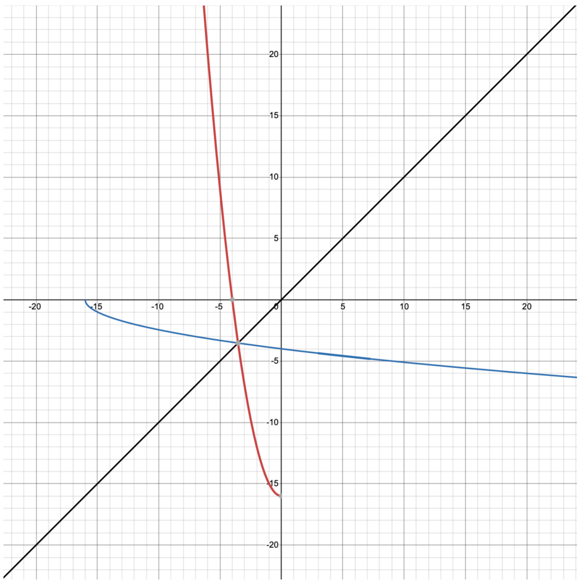
3 p

4. Funktion och invers

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = x^2 - 16, \qquad x \in]-\infty, 0]$$

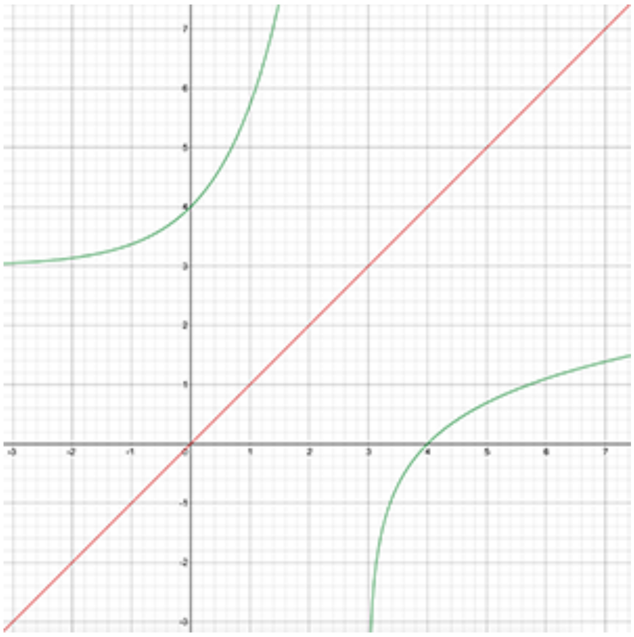
Svar: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+16}\,,\ D_{f^{-1}} = [-16, \infty[\,,\ V_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$



b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = \ln(x-3)$$

Svar: $f^{-1}(x) = e^x + 3,\ D_{f^{-1}} =]-\infty, \infty[\,, V_{f^{-1}} =]3, \infty[$



3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$4z - 24i = \bar{z} + 12 - 4i$$

Lösningstips: Real- och imaginärdel studeras separat och man får $z = 4 + 4i$

b)

$$2z^4 + 72 = 10z^2$$

Lösningstips: Låt $t = z^2$. Sortering och kvadratkomplettering ger rötterna

$z = \pm 2i$ eller $z = \pm 3$

c)

$$4z^3 - 256i = 0$$

Lösningstips: Division med 4, polär form, De Moivre ger

$z = -4i$ eller $z = \pm 2\sqrt{3} + 2i$

3 p

6. Blandat

a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal z vid följande division:

$$\frac{z}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$$

Lösningstips: $\frac{z}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{re^{iv}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \cdots = \frac{1}{2}re^{-i\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}$ visar att argumentet minskar $\frac{\pi}{4}$ och absolutbeloppet halveras.

b) Visa med hjälp av Eulers formler att

$$\cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$$

Ledning: $\cos^2 v - \sin^2 v = \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} \cdot \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} - \frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i} \cdot \frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i} = \cdots$

$$= \frac{e^{i2v} + e^{-i2v}}{2} = \cos 2v$$

c) För vilka komplexa tal z gäller följande likhet:

$$|z| + |4+4i| = |z+4+4i|$$

Svar: Alla z som har ett samma argument som $4+4i$ – alltså z med argumentet $\frac{\pi}{4}$.
Övriga z ger ett större vänsterled enligt triangelolikheten.

3 p