

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2024

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Institution:	ITN
Kurs:	Matematisk Grundkurs
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skriddon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2024-10-31 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen

$$\sqrt{6-x} = x + 6$$

Lösningstips: Kvadrering ger en andragradsekvation rötterna $x = -3$ eller $x = -10$ varav endast $x = -3$ är korrekt.

b) Lös ekvationen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Lösningstips: Rotgissning och polynomdivision med tillhörande faktor(er) ger rötterna $x = 1$, $x = 2$ eller $x = 3$

c) Lös olikheten

$$|x - 4| = 7$$

Lösningstips: Två fall på olika sidor av $x = 4$ ger rötterna
 $x = 11$ eller $x = -3$

3 p

2. Lös olikheten

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9} \leq 1$$

Lösningstips: Lika nämnare och faktorisering till nollprodukt ger efter
förkortning olikheten $\frac{x-4}{x-3} \geq 0$ som efter teckenstudie av faktorerna ger
lösningsmängderna $x \in]-\infty, 3[\cup [4, \infty[$.

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift.
Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1$$

Lösningstips: "Trigettan" eller "Cosinus för dubbla vinkeln" ger
 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b)

$$\sin 2x = \sin x$$

Lösningstips: "Sinus för dubbla vinkeln" ger
 $x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

c)

$$2 \ln x = \ln(28 - 3x)$$

Lösningstips: Logaritmlagar ger en andragradsekvation $x^2 + 3x - 28 = 0$ med
två rötter varav endast $x = 4$ duger i den ursprungliga ekvationen.

3 p

4. Funktioners invers

a) Låt

$$f(x) = \ln(3 - x)$$

och bestäm funktionen invers $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängd.

Lösningstips: Skifte av x och y som löses ut samt ordinarie funktionens
värdemängd ger inversen

$$f^{-1}(x) = 3 - e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & , \quad -\infty < x \leq 4 \\ x + 3 & , \quad 4 < x < \infty \end{cases}$$

och bestäm funktionen invers $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängd.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 6 & , \quad -\infty < x \leq 5 \\ x - 3 & , \quad 7 < x < \infty \end{cases}$$

c) Låt

$$f(x) = \sin x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

och bestäm funktionen invers $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängd.

$$\text{Svar: Till exempel } f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{eller } f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^4 + 20z^2 + 64 = 0$$

Lösningstips: Eventuellt variabelskifte $z^2 = t$ följt av kvadratkomplettering eller faktorisering till nollprodukt ger $z = \pm 4i$ eller $z = \pm 2i$

b)

$$z^2 + (2 + 2i)z + 9 + 2i = 0$$

Lösningstips: Kvadratkomplettering ger $z = -1 - i \pm 3i$

c)

$$2z^4 + 128 = 0$$

Lösningstips: Division med $2i$, polär form och De Moivre ger

$$z = \sqrt[4]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2 \text{ eller } 3$$

som efter förenkling med Eulers formel ger

$$z = 2 \pm 2i \text{ eller } z = -2 \pm 2i$$

3 p

6. Lös ekvationen algebraiskt och markera lösningen i det komplexa talplanet

$$3|z - 2 - 4i| = |z - 10 - 4i|$$

Lösningstips: Man låter $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(z)$.

Pythagoras sats ger ekvationen

$$3\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 4)^2}$$

om efter kvadrering, sortering och kvadratkompletteringar ger cirkelns ekvation

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

med radien 3 och centrum i $(1, 4)$.



