INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2024

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2025-08-26 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=-5 \\ x-y+z=7 \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$

b) Lös olikheten:

$$\frac{x^2-5x}{x} \geq 0$$

Lösningstips: Faktorisering och teckenstudie ger $x \in [5, \infty[$.

c) Lös ekvationen:

$$|x+12| = |x-8|$$

Lösningstips: Tre fall studeras och de två yttre fallen ger saknar lösning medan det mellersta fallet ger $x=-2$

3 p

2.

a. Lös olikheten

$$x^4 - 13x^2 + 40 < 4$$

Lösningstips: Subtraktion med 4 och faktorisering ger

$$(x^2 - 9)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)(x-3)(x+2)(x-2) < 0$$

Teckenstudie av faktorerna ger

$$x \in \cup\,]-3, -2[\cup\,]2, 3[$$

b. Kommentera implikationen nedan – är den rätt/fel och varför?

$$x \in]40, 60[\Rightarrow x \in [40, 60]$$

Lösningstips: Om en person är 40 till 60 år gammal (exklusive gränserna) medför det att personen garanterat är inom åldersintervallet 40 till 60 år (inklusive gränserna) – därmed är påståendet korrekt, även om det ger ”sämre precision”.

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

Lösningstips: Sinus för dubbla vinkeln och faktorisering ger
$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b)

$$2\ln(x+5) = 0$$

Lösningstips: Tredje logaritmlagen och invers funktion ger en andragradsekvation $x^2 + 10x + 24 = 0$
med rötterna $x = -6$ eller $x = -4$ varav endast $x = -4$ duger.

c)

$$(10^x - 1)(x^2 - 9)(\ln(x+5))\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin x\right) = 0$$

Lösningstips: Ekvationen är redan faktoriserad och faktorerna har nollställena $x = 0, x = \pm 3, x = -4$ respektive $x = \frac{1}{2}$ men arcsin kräver att $-1 \leq x \leq 1$

Och detta gör att endast $x = 0$ eller $x = \frac{1}{2}$ duger.

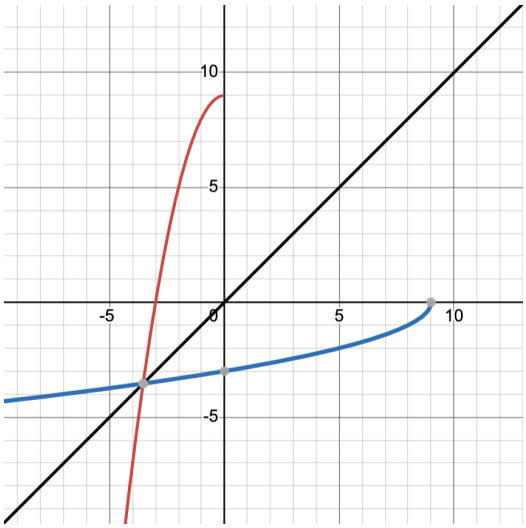
3 p

4. Funktion och invers

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = 9 - x^2, \qquad x \in]-\infty, 0]$$

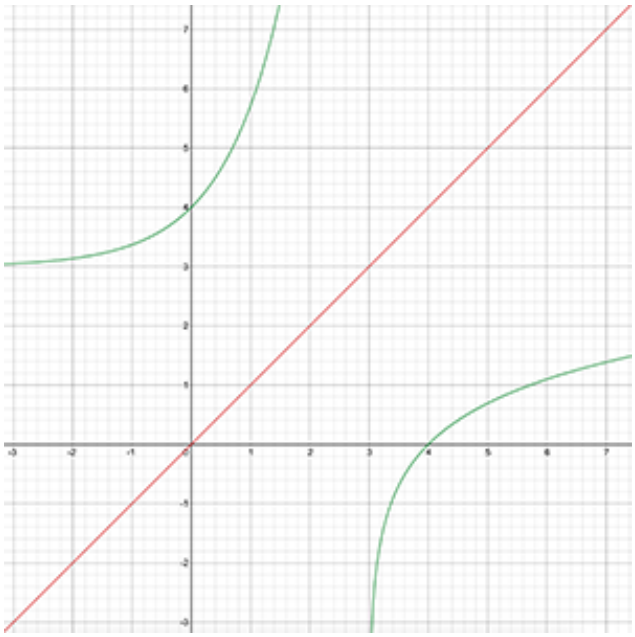
Svar: $f^{-1}(x) = -\sqrt{9-x}$, $D_{f^{-1}} =]-\infty,\ 9]$, $V_{f^{-1}}, =]-\infty, 0]$



b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = \ln(x - 3)$$

Svar: $f^{-1}(x) = e^x + 3$, $D_{f^{-1}} =]-\infty, \infty[$, $V_{f^{-1}} =]3, \infty[$



3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^2 + (6 + 8i)z + 9 + 24i = 0$$

Lösningstips: Kvadratkomplettering ger $z_{1,2} = -3 - 4i \pm 4i$

b)

$$3z^3 - 192i = 0$$

Lösningstips: Lös ut z^3, skriv på polär form och De Moivre ger

$z = -4i$ eller $z = \pm 2\sqrt{3} + 2i$

3 p

6. Blandat

a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal z vid följande multiplikation:

$$z(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$$

Lösningstips: $z(\sqrt{2}+\sqrt{2}i) = re^{iv}2e^{i\frac{\pi}{4}} = \cdots = 2re^{i\left(v+\frac{\pi}{4}\right)}$ visar att argumentet ökar $\frac{\pi}{4}$ och absolutbeloppet fördubblas.

b) Visa med hjälp av Eulers formler att

$$2\sin v\cos v = \sin 2v$$

Ledning: $2\sin v\cos v = 2\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}\cdot\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} = \cdots$
$= \frac{e^{i2v}-e^{-i2v}}{2i} = \sin 2v$

c) För vilka komplexa tal z gäller följande likhet:

$$|z|+|4i| > |z+4i|$$

Svar: Alla z som har annat argument än $\frac{\pi}{2}$. Dessa z ger ett större vänsterled enligt triangelolikheten.

3 p