

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2024

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2025-08-26 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = -5 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$$

b) Lös olikheten:

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \geq 0$$

Lösningstips: Faktorisering och teckenstudie ger $x \in [5, \infty[$.

c) Lös ekvationen:

$$|x + 12| = |x - 8|$$

Lösningstips: Tre fall studeras och de två yttre fallen ger saknar lösning medan det mellersta fallet ger $x = -2$

3 p

2.

a. Lös olikheten

$$x^4 - 13x^2 + 40 < 4$$

Lösningstips: Subtraktion med 4 och faktorisering ger

$$(x^2 - 9)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2) < 0$$

Teckenstudie av faktorerna ger

$$x \in \cup]-3, -2[\cup]2, 3[$$

b. Kommentera implikationen nedan – är den rätt/fel och varför?

$$x \in]40, 60[\Rightarrow x \in [40, 60]$$

Lösningstips: Om en person är 40 till 60 år gammal (exklusive gränserna) medför det att personen garanterat är inom åldersintervallet 40 till 60 år (inklusive gränserna) – därmed är påståendet korrekt, även om det ger "sämre precision".

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

Lösningstips: Sinus för dubbla vinkeln och faktorisering ger

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$2 \ln(x + 5) = 0$$

Lösningstips: Tredje logaritmlagen och invers funktion ger en andragradsekvation $x^2 + 10x + 24 = 0$ med rötterna $x = -6$ eller $x = -4$ varav endast $x = -4$ duger.

c)

$$(10^x - 1)(x^2 - 9)(\ln(x + 5))\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin x\right) = 0$$

Lösningstips: Ekvationen är redan faktoreriserad och faktorerna har nollställena

$x = 0, x = \pm 3, x = -4$ respektive $x = \frac{1}{2}$ men arcsin kräver att $-1 \leq x \leq 1$

Och detta gör att endast $x = 0$ eller $x = \frac{1}{2}$ duger.

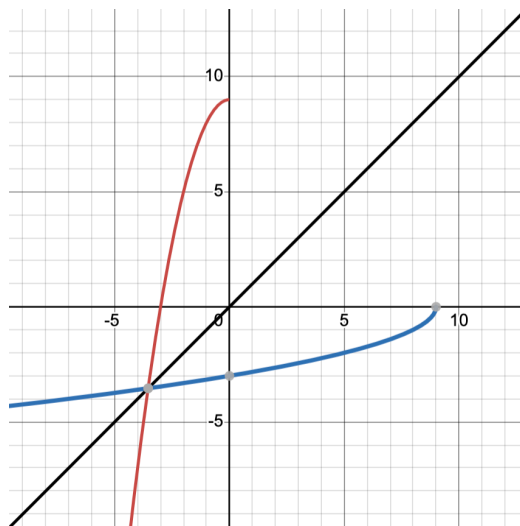
3 p

4. Funktion och invers

- a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = 9 - x^2, \quad x \in]-\infty, 0]$$

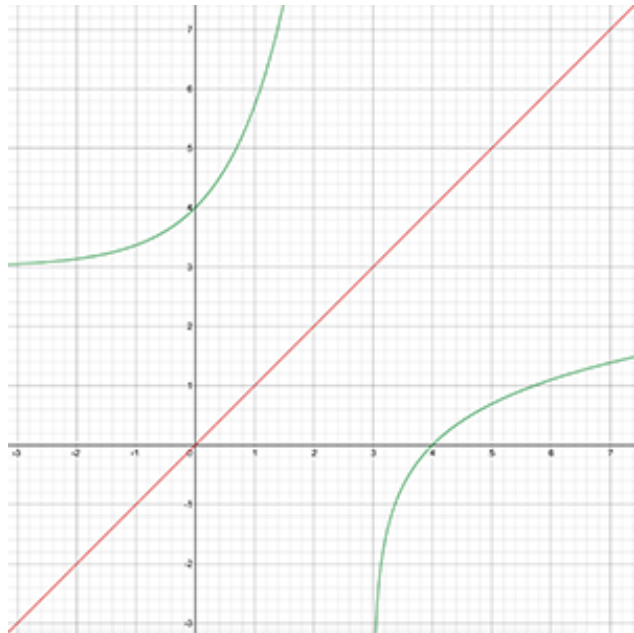
Svar: $f^{-1}(x) = -\sqrt{9 - x}$, $D_{f^{-1}} =]-\infty, -9]$, $V_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$



- b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = \ln(x - 3)$$

Svar: $f^{-1}(x) = e^x + 3$, $D_{f^{-1}} =]-\infty, \infty[$, $V_{f^{-1}} =]3, \infty[$



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^2 + (6 + 4i)z - 20 + 12i = 0$$

Lösningstips: Kvadratkomplettering ger $z_{1,2} = -3 - 2i \pm 5$

b)

$$3z^3 - 192i = 0$$

Lösningstips: Lös ut z^3 , skriv på polär form och De Moivre ger

$$z = -4i \text{ eller } z = \pm 2\sqrt{3} + 2i$$

3 p

6. Blandat

- a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal z vid följande multiplikation:

$$z(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$

Lösningstips: $z(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = re^{iv}2e^{i\frac{\pi}{4}} = \dots = 2re^{i(v+\frac{\pi}{4})}$ visar att argumentet ökar $\frac{\pi}{4}$ och absolutbeloppet fördubblas.

- b) Visa med hjälp av Eulers formler att

$$2 \sin v \cos v = \sin 2v$$

$$\begin{aligned} \text{Ledning: } 2 \sin v \cos v &= 2 \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} \cdot \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \dots \\ &= \frac{e^{i2v} - e^{-i2v}}{2i} = \sin 2v \end{aligned}$$

- c) För vilka komplexa tal z gäller följande likhet:

$$|z| + |4i| > |z + 4i|$$

Svar: Alla z som har annat argument än $\frac{\pi}{2}$. Dessa z ger ett större vänsterled enligt triangelolikheten.

3 p