

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2025

Utbildningskod: TNIU19
Modul: TEN2
Institution: ITN
Kurs: Matematisk Grundkurs
Betyg 3: Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4: Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5: Minst 15 p
Att tänka på: Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid: 2026-01-05 kl 08:00–13:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen

$$|9 - x| - |3 - x| = 4$$

Ledning: Tre fall studeras och endast det mellersta ger ett svar

Svar: $x = 4$

b) Lös ekvationen

$$\sqrt{81 - 36x} = x - 5$$

Ledning: Kvadrering ger

$$x^2 + 26x - 56 = 0 \Leftrightarrow (x + 28)(x - 2) = 0$$

som ger orimliga förslag och ekvationen saknar reella rötter

c) Lös olikheten

$$\frac{1}{x} \leq x$$

Ledning: Nollprodukten

$$\frac{(1+x)(1-x)}{x} \leq 0$$

teckenstuderas och man får $x \in [-1, 0[\cup [1, \infty[$

2. Lös olikheten

$$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \geq 0$$

Ledning: Faktorisering ger fyra faktorer

$$(x - 2)(x - 2)(x - 3)(x - 3) \geq 0$$

och teckenstudie av dem visar att alla reella tal $x \in \mathbb{R}$ är OK.

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\cos 2x + \sin^2 x = 1$$

Svar: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b)

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

Svar: $x = 0$ (dubbelrot)

c)

$$\arccos 2x (e^{2x} - 1) \ln(2x + 2) = 0$$

Ledning: Faktorerna nollställs av $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ respektive $x = -\frac{1}{2}$.

3 p

4. Låt

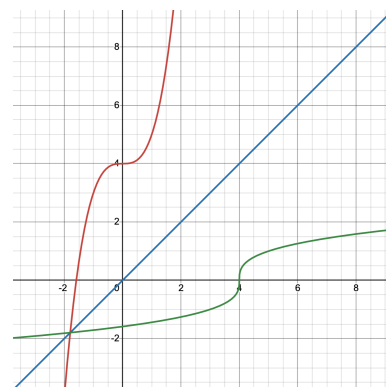
$$y = f(x) = x^3 + 4$$

- a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar:
 $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$
med $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

- b) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar:



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$

$$2iz^3 = \frac{16}{i}$$

Svar: $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ eller $z_3 = -2$

- b) Lös ekvationen

$$|z + 8i| = 2|z + 2i|$$

Svar: Genom att välja $z = x + iy$ får man $x^2 + y^2 = 16$
som motsvarar en cirkel i det komplexa talplanet
med centrum i origo och radien $r = 4$

- c) Markera i det komplexa talplanet

$$\text{Im}(z) > \text{Re}(z) - 2$$

Ledning:

Genom att välja $x = \text{Re}(z)$ och $y = \text{Im}(z)$ får man området ovanför linjen
 $y = x - 2$ i det komplexa talplanet.

3 p

6.

a) Visa med hjälp av Eulers första formel att

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Ledning: Addition av $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ och konjugatet $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ ger efter omskrivning sambandet ovan.

b) Visa med hjälp av sambandet ovan att

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

Ledning: Utveckling av vänsterledet enligt

$$(\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})$$

ger efter utveckling och omskrivning

$$\frac{6}{16} e^{i0x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

vilket stämmer med högerledet

3 p