

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2025

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2026-08-27 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 2z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

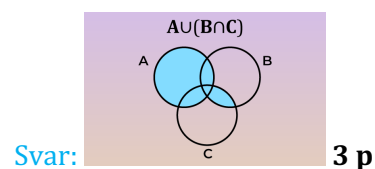
b) Lös olikheten:

$$x^2 - 7x - 18 \geq 0$$

Lösningstips: Faktorisering och teckenstudie ger $x \in]-\infty, -2] \cup [9, \infty[$.

c) Förklara med en skiss (med ett venndiagram) följande kombination av mängder:

$$(B \cap C) \cup A$$



2.

a. Lös olikheten

$$|2x - 4| < |5 - x|$$

Lösningstips:

För intervallet $x \leq 2$ gäller att

$$|2x - 4| < |5 - x| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{För} \\ x \leq 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow -(2x - 4) < 5 - x \Leftrightarrow x > -1$$

Alltså lösningsdelmängden

$$-1 < x \leq 2$$

För intervallet $2 \leq x \leq 5$ gäller att

$$|2x - 4| < |5 - x| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{För} \\ 2 \leq x \leq 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow 2x - 4 < 5 - x \Leftrightarrow 3x < 9 \Leftrightarrow x < 3$$

Alltså lösningsdelmängden

$$2 \leq x < 3$$

För intervallet $x \geq 5$ gäller att

$$|2x - 4| < |5 - x| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{För} \\ x \geq 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow 2x - 4 < -(5 - x) \Leftrightarrow x < -1$$

Alltså tomma mängden

Unionen av lösningsdelmängderna ovan blir

$$x \in \cup]-1, 3[$$

b. Kommentera implikationen nedan – är den rätt/fel och varför?

$$x > 40 \Rightarrow x \geq 30$$

Lösningstips: Om en person är mer än 40 år gammal så medför det att personen garanterat är minst 30 år gammal – därmed är implikationen korrekt, även om det sistnämnda ger "mindre exakt information".

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

Lösningstips: Sinus för dubbla vinkeln och faktorisering ger

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$2 \ln(x - 4) = 0$$

Lösningstips: Tredje logaritmlagen och den inversa funktionen ger en andragradsekvation $x^2 - 8x + 15 = 0$ so löses med rötterna $x = 5$ eller $x = 3$ varav endast $x = 5$ duger.

c)

$$(10^x - 100)(4x^2 - 1)(\ln(x + 2))\left(\frac{\pi}{4} - \arctan x\right) = 0$$

Lösningstips: Ekvationen är redan faktorerad och faktorerna har nollställena $x = 2$, $x = \pm \frac{1}{2}$, $x = -1$ respektive $x = 1$. Ekvationen är definierad för $x > -2$ (krav från faktorn $\ln(x + 2)$) och därmed duger samtliga faktorerers fem olika nollställen som rötter till ekvationen.

3 p

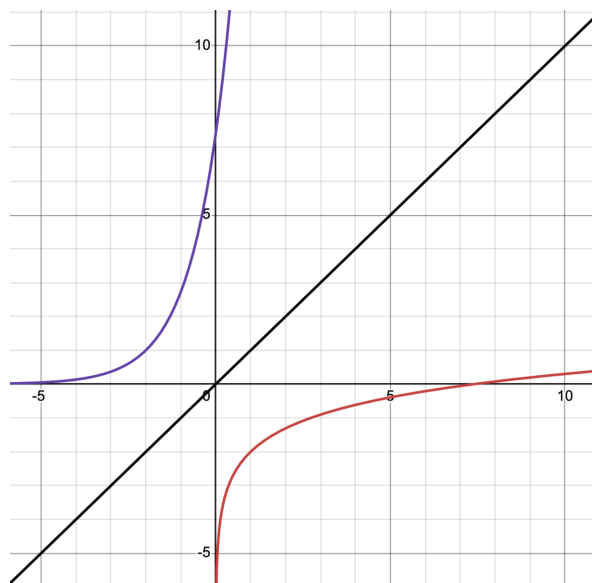
4. Funktion och invers

a) Låt

$$f(x) = e^{x+2}$$

Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = (\ln x) - 2, \quad D_{f^{-1}} =]0, \infty], \quad V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

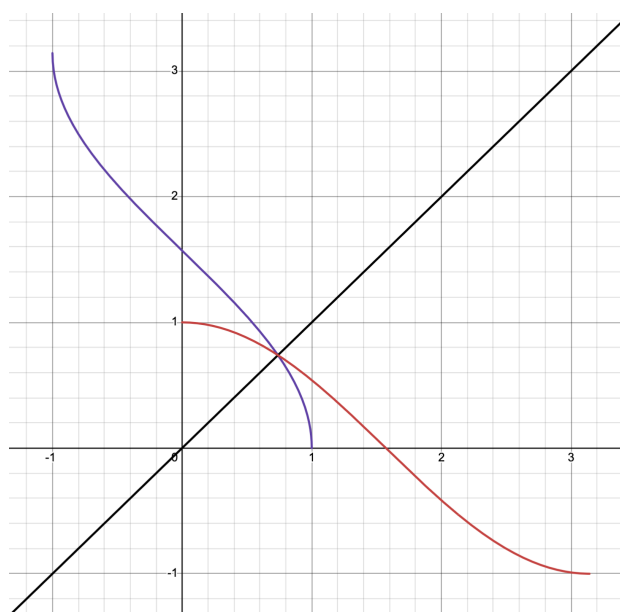


b) Låt

$$f(x) = \arccos x$$

Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar: $f^{-1}(x) = \cos x$, $D_{f^{-1}} = [0, \pi]$, $V_{f^{-1}} = [-1, 1]$



3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^2 + (6 + 4i)z + 9 + 12i = 0$$

Lösningstips: Kvadratkomplettering ger $z_{1,2} = -3 - 2i \pm 2i$

b)

$$3z^3 + 81i = 0$$

Lösningstips: Lös ut z^3 , skriv på polär form och De Moivre ger

$$z = 3i \text{ eller } z = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

3 p

6. Blandat

- a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal z vid följande multiplikation:

$$z(3\sqrt{3} + 3i)$$

Lösningstips: $z(3\sqrt{3} + 3i) = z \left(6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \right) = re^{iv} 6e^{i\frac{\pi}{6}} = 6re^{i(v+\frac{\pi}{6})}$ visar att argumentet ökar $\frac{\pi}{6}$ och absolutbeloppet blir 6 gånger så stort.

- b) Visa med hjälp av Eulers formler att

$$\cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$$

$$\begin{aligned} \text{Lösning: } \cos^2 v - \sin^2 v &= \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \cdot \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} - \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} \cdot \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} \\ &= \frac{e^{i2v} + 2e^0 + e^{-i2v}}{4} - \frac{e^{i2v} - 2e^0 + e^{-i2v}}{-4} = \frac{2e^{i2v} + 2e^{-i2v}}{4} = \frac{e^{i2v} + e^{-i2v}}{2} = \cos 2v \end{aligned}$$

- c) För vilka komplexa tal z gäller följande likhet:

$$|z| + |-4i| = |z - 4i|$$

Svar: Alla z som argumentet $\frac{3\pi}{2}$. Alla andra z ger ett större vänsterled enligt triangelolikheten.

3 p