

---

## Uppdaterade uppgifter 1-10 till Krzysztofs häfte

---

Dessa uppgifter ersätter de tio uppgifterna som fanns i slutet av Krzysztofs häfte som tar upp teorin från föreläsning 8 inom kursen TNIU23.

1) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

- Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?
- Bestäm  $c$  så att  $f_X(x)$  blir en täthetsfunktion.
- Bestäm sannolikheten för  $x > 0$ , alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln  $X$ , som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett positivt värde.
- Vilka egenskaper har en fördelningsfunktion?
- Bestäm tillhörande fördelningsfunktion  $F_X(x)$ .

Låt nu istället  $f_X(x)$  gälla på följande intervall:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } 3 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

- Bestäm på nytt  $c$  så att  $f_X(x)$  blir en täthetsfunktion.
- Bestäm sannolikheten för  $x > 8$ , alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln  $X$ , som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett värde större än 8.
- Bestäm på nytt den tillhörande fördelningsfunktionen  $F_X(x)$ .

2) Skissa kurvor för täthetsfunktionen skapad i 1) b) och den tillhörande fördelningsfunktionen i 1) e).

- 3) Låt  $X$  vara en stokastisk variabel för radioaktivt sönderfall enligt funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

med sönderfallskonstanten  $\lambda$ . Vi minns från kärnfysiken att halveringstiden  $T = 1/\lambda$ .

- Visa att  $f_X(x)$  faktiskt är en täthetsfunktion.
- Bestäm tillhörande fördelningsfunktion  $F_X(x)$ .

- 4) Låt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

- Beräkna nedre kvartilen  $x_{0,25}$  med hjälp av fördelningsfunktionen ovan.

Den tillhörande täthetsfunktion är

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

- Beräkna åter den nedre kvartilen  $x_{0,25}$  men med hjälp av en integral med sökt övre integrationsgräns.
- Beräkna medianen  $x_{0,5}$  på två olika sätt.
- Beräkna alfakvantilen  $x_\alpha$ .
- Visa med hjälp av svaret i d) att alfakvantilen  $x_\alpha \rightarrow \infty$  då sannolikheten  $\alpha \rightarrow 1^-$  och fundera över innebörden av detta.

- 5) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5} e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ \frac{3}{5} e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- Hur stor är chansen att ett slumpmässigt valt  $X$  är negativt?
- Beräkna nedre kvartilen.
- Beräkna medianen med hjälp av en integral.
- Bestäm fördelningsfunktionen.
- Beräkna istället medianen med hjälp av fördelningsfunktionen.

6) Låt  $F_X(x)$  vara en fördelningsfunktion enligt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} & \text{för } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{för } x > 2 \end{cases}$$

- Hur ser man att  $F_X(x)$  saknar tillhörande täthetsfunktion?
- Vilket krav på kontinuitet finns för fördelningsfunktioner  $F_X(x)$ ?

7) Den stokastiska variabeln  $X$  anger hur lång tid det normalt tar (i minuter efter att en affär öppnas) innan den första kunden dyker upp. Variabeln beskrivs av fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 1 - e^{-0.5x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- Beräkna på två sätt hur stor är chansen att den första kunden dyker upp inom tidsintervallet 2-4 min efter att affären öppnas.
- Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp efter exakt 2 min.
- Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp senare än 4 min.

8) Den stokastiska variabeln  $X$  anger (i mil) "avståndet mellan en jagande havsörn och örnens bo". Avståndet beskrivs av täthetsfunktionen:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 8xe^{-4x^2} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- Beräkna median-avståndet.
- Beräkna den radie (avstånd till örnboet) som örnen finns inom med 99 % säkerhet.

9) Den stokastiska variabeln  $X$  beskrivs av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{för } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

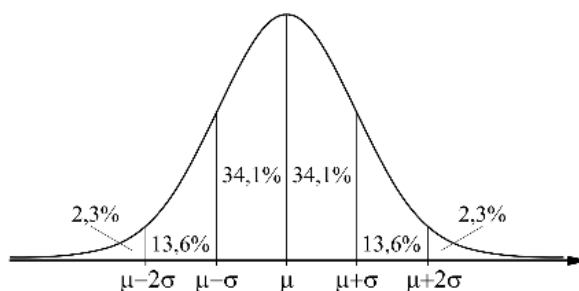
- Beräkna medianen.
- Beräkna väntevärdet  $\mu = E(X)$ .
- Beräkna variansen  $V(X)$ .
- Beräkna standardavvikelsen  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

10) Vid normalfördelning gäller exempelvis att

"Sannolikheten att ett slumpmässigt valt  $X$  finns inom en standardavvikelse från väntevärdet" =  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68 \%$

och "sannolikheten att ett slumpmässigt valt  $X$  finns inom två standardavvikelser från väntevärdet" =  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95 \%$ .

Normalfördelningskurvan beskriver fördelningen:



Låt nu den stokastiska variabeln  $X$  beskrivas av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

- Beräkna väntevärdet  $\mu = E(X)$ .
- Beräkna standardavvikelsen  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

Fördelningen i denna uppgift är dock "triangulär" till skillnad från den klockformiga normalfördelningskurvan i figuren ovan och man får andra sannolikheter inom de olika intervallen runt väntevärdet  $\mu$ .

- Beräkna sannolikheten  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$  och jämför med motsvarande sannolikhet ovan.
- Beräkna sannolikheten  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$  och jämför med motsvarande sannolikhet ovan.

---

## Facit

---

1)

a) Se Definition 1 på sid 1 i K:z häfte

b)  $c = \frac{1}{4}$

c) 50 %

d) Se Sats 7 på sid 6 i K:z häfte

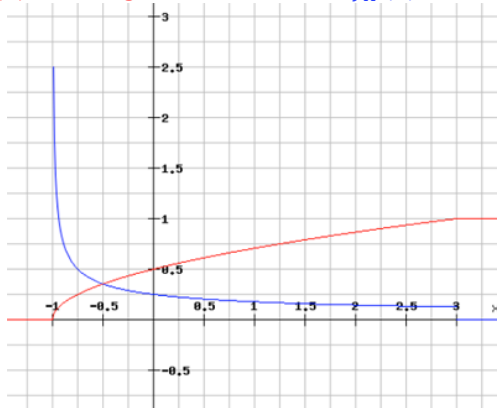
e) 
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + 0 & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{för } x > 3 \end{cases}$$

f)  $c = \frac{1}{2}$

g) 0 %

h) 
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 3 \\ \sqrt{x+1} - 2 & \text{för } 3 \leq x \leq 8 \\ 1 & \text{för } x > 8 \end{cases}$$

2)  $F_X(x)$  som stiger från 0 till 1 och  $f_X(x)$  med intressant area under blå kurva:



3)

a) Man visar att funktionen stämmer enligt de två egenskaperna i Definition 1 på sid 1 i K:z häfte

b) 
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

4)

a)  $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

b)  $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

c)  $x_{0.5} = \sqrt{2}$

d)  $x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

e)  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = \infty$

Detta visar att det för denna stokastiska variabel  $X$  krävs ett oändligt stort  $x$ -värde  $x_\alpha$  för att en slumpmässigt vald  $X$  med säkerhet skall vara mindre än  $x_\alpha$ . Alltså  $x_\alpha \rightarrow \infty$  om  $\alpha = P(X < x_\alpha) \rightarrow 1^-$ .

5)

a) 40 %

b)  $x_{0.25} = \frac{\ln 5 - \ln 8}{3} \approx -0.16$

c)  $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

d) 
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ 1 - \frac{3}{5}e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

e)  $1 - \frac{3}{5}e^{-x} = \frac{1}{2}$  ger också  $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

6)

a) Då funktionen inte är kontinuerlig i  $x = 1$  är den knappast deriverbar och saknar därmed tillhörande täthetsfunktion.

b) En fördelningsfunktion måste åtminstone vara högerkontinuerlig i alla punkter, vilket denna funktion är.

7)

a)  $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 23 \%$

b) 0 % (integral utan area)

c)  $\frac{1}{e^2} \approx 14 \%$

8)

a)  $x_{0.5} = \sqrt{\frac{\ln 2}{4}} \approx 4.2 \text{ km}$

b)  $x_{0.99} = \sqrt{\frac{\ln 100}{4}} = \sqrt{\frac{\ln 10}{2}} \approx 10.7 \text{ km}$

9)

a)  $x_{0.5} = \sqrt{2} \approx 1.41$

b)  $\mu = E(X) = \frac{4}{3} \approx 1,33$

c)  $\sigma^2 = V(X) = \frac{2}{9}$

d)  $\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

10)

a)  $\mu = E(X) = \frac{2}{3} \approx 0,67$

b)  $\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{18}} \approx 0,24$

c) Integral mellan gränserna  $\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}$  och  $\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{18}}$  ger sannolikheten

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 = \dots = \frac{4\sqrt{2}}{9} \approx 63 \% \text{ (jämfört med ca 68 \% vid normalfördelning)}$$

d) Integral mellan gränserna  $\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}}$  och 1 (ty  $\mu + 2\sigma$  ligger utanför  $0 \leq x \leq 1$ ) ger

$$\text{sannolikheten } 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}}\right)^2 = \dots = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \approx 96 \% \text{ (jämfört med ca 95 \% vid normalfördelning)}$$