
Uppgifter till föreläsning 8

Dessa uppgifter ersätter de tio uppgifterna som fanns i slutet av Krzysztofs häfte som tar upp teorin från föreläsning 8 inom kursen TNIU23.

1) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } 3 \leq x \leq 24 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

- a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?
- b) Bestäm c så att $f_X(x)$ blir en täthetsfunktion.
- c) Bestäm sannolikheten för $x \geq 24$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X , som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett värde större än 8.
- d) Bestäm sannolikheten för $x \geq 8$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X , som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett värde större än 8.
- e) Vilka egenskaper har en fördelningsfunktion?
- f) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$.

Låt nu istället $f_X(x)$ gälla på följande intervall:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

- g) Bestäm på nytt c så att $f_X(x)$ blir en täthetsfunktion.
- h) Bestäm sannolikheten för $x \geq 0$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X , som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett värde större än 0.
- i) Bestäm på nytt den tillhörande fördelningsfunktionen $F_X(x)$.
- j) Skissa kurvor för täthetsfunktionen och den tillhörande fördelningsfunktionen.

- 2) Låt X vara en stokastisk variabel för radioaktivt sönderfall enligt funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

med sönderfallskonstanten λ . Vi minns från kärnfysiken att halveringstiden $T = 1/\lambda$.

- a) Visa att $f_X(x)$ faktiskt är en täthetsfunktion.
- b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$.

- 3) Låt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Beräkna nedre kvartilen $x_{0.25}$ med hjälp av fördelningsfunktionen ovan.

Den tillhörande täthetsfunktion är

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

- b) Beräkna åter den nedre kvartilen $x_{0.25}$ men med hjälp av en integral med sökt övre integrationsgräns.
- c) Beräkna medianen $x_{0.5}$ på två olika sätt.
- d) Beräkna alfakvantilen x_α .
- e) Visa med hjälp av svaret i d) att alfakvantilen $x_\alpha \rightarrow \infty$ då sannolikheten $\alpha \rightarrow 1^-$ och fundera över innebörden av detta.

- 4) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5} e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ \frac{3}{5} e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Hur stor är chansen att ett slumpmässigt valt X är negativt?
- b) Beräkna nedre kvartilen.
- c) Beräkna medianen med hjälp av en integral.
- d) Bestäm fördelningsfunktionen.
- e) Beräkna istället medianen med hjälp av fördelningsfunktionen.

5) Låt $F_X(x)$ vara en fördelningsfunktion enligt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} & \text{för } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{för } x > 2 \end{cases}$$

- a) Hur ser man att $F_X(x)$ saknar tillhörande täthetsfunktion?
- b) Vilket krav på kontinuitet finns för fördelningsfunktioner $F_X(x)$?

6) Den stokastiska variabeln X anger hur lång tid det normalt tar (i minuter efter att en affär öppnas) innan den första kunden dyker upp. Variabeln beskrivs av fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 1 - e^{-0.5x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Beräkna på två sätt hur stor är chansen att den första kunden dyker upp inom tidsintervallet 2-4 min efter att affären öppnas.
- b) Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp efter exakt 2 min.
- c) Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp senare än 4 min.

7) Den stokastiska variabeln X anger (i mil) "avståndet mellan en jagande havsörn och örnens bo". Avståndet beskrivs av täthetsfunktionen:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 8xe^{-4x^2} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Beräkna median-avståndet.
- b) Beräkna den radie (avstånd till örnboet) som örnen finns inom med 99 % säkerhet.

8) Den stokastiska variabeln X beskrivs av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{för } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

- a) Beräkna medianen.
- b) Beräkna väntevärdet $\mu = E(X)$.

Facit

1)

a) Se Definition 1 från föreläsningen

b) $c = \frac{1}{6}$

c) 0 %

d) Integral över intervallet $x \in [8, 24]$ ger sannolikheten $\frac{2}{3} \approx 67\%$

e) Se Sats 7 från föreläsningen

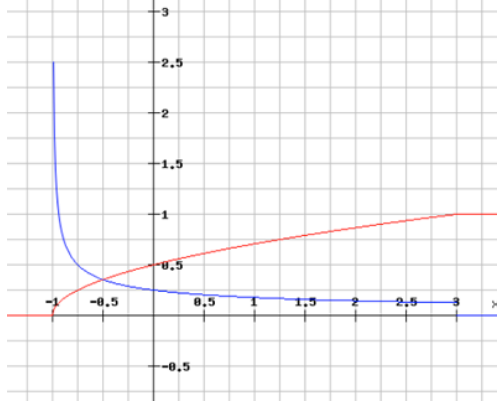
f)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 3 - 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{x+1} - \frac{2}{3} & \text{för } 3 \leq x \leq 24 \\ 1 & \text{för } x > 24 \end{cases}$$

g) $c = \frac{1}{4}$

h) 50 %

i)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + 0 & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{för } x > 3 \end{cases}$$

j) $F_X(x)$ som stiger från 0 till 1 och $f_X(x)$ med intressant area under blå kurva:



2)

a) Man visar att funktionen stämmer enligt de två egenskaperna i Definition 1 från föreläsningen

b)
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

3)

a) $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

b) $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

c) $x_{0.5} = \sqrt{2}$

d) $x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

e) $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = \infty$

Detta visar att det för denna stokastiska variabel X krävs ett oändligt stort x -värde x_α för att en slumpmässigt vald X med säkerhet skall vara mindre än x_α . Alltså $x_\alpha \rightarrow \infty$ om $\alpha = P(X < x_\alpha) \rightarrow 1^-$.

4)

a) 40 %

b) $x_{0.25} = \frac{\ln 5 - \ln 8}{3} \approx -0.16$

c) $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

d)
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ 1 - \frac{3}{5}e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

e) $1 - \frac{3}{5}e^{-x} = \frac{1}{2}$ ger också $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

5)

a) Då funktionen inte är kontinuerlig i $x = 1$ är den knappast deriverbar och saknar därmed tillhörande täthetsfunktion.

b) En fördelningsfunktion måste åtminstone vara högerkontinuerlig i alla punkter, vilket denna funktion är.

6)

a) $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 23 \%$

b) 0 % (integral utan area)

c) $\frac{1}{e^2} \approx 14 \%$

7)

a) $x_{0.5} = \sqrt{\frac{\ln 2}{4}} \approx 4.2 \text{ km}$

b) $x_{0.99} = \sqrt{\frac{\ln 100}{4}} = \sqrt{\frac{\ln 10}{2}} \approx 10.7 \text{ km}$

8)

a) $x_{0.5} = \sqrt{2} \approx 1.41$

b) $\mu = E(X) = \frac{4}{3} \approx 1,33$