

# Ledtrådar till uppgifter inom TNIU19

---

## Allmänna råd vid lösning av uppgifter från arbetsschemat:

- Försök inledningsvis att lösa uppgiften tillsammans med en klasskamrat – detta genom att dra er till minnes innehållet i den föregående föreläsningen samt det som ni har studerat i läroboken och prata matematik utan att omgivningen störs.
- Försök i andra hand att lösa uppgiften med hjälp av de inledande ledtrådarna nedan.
- Försök i tredje hand att lösa uppgiften med hjälp ngn annan person, t.ex. läraren, mattefaddrar, mattementorer eller andra seriösa studenter i klassen.

## Kapitel 1

### Ämnesdag 1:

- K1 Ledtråd: Inled med att sätta  $x = 0.111 \dots$  och sedan  $10x = 1.111 \dots$  för att få samma decimalutveckling...
- K3 Ledtråd: Inled med att sätta  $10x = 1.1212 \dots$  och sedan  $1000x = 112.1212 \dots$  för att få samma decimalutveckling...
- K5
- Ledtråd: Om "råmängden" vi utgår ifrån är levande djur så är däggdjur...
  - Ledtråd: Mängden människor i ett klassrum kan vara en identisk delmängd studenter i samma klassrum (om enbart studenter finns i klassrummet) medan en äkta delmängd måste...
  - Ledtråd: "Antalet kor som kan gå i..."
  - Ledtråd: Även negativa...
  - Ledtråd: Talet 0.111 kan skrivas som ett bråk  $\frac{1}{9}$ ...
  - Ledtråd: Både tal som kan och inte kan skrivas som...
  - Ledtråd: "Lite fantasi, lite verklighet eller lita av varje..."
  - Ledtråd: "Ingen ordning på decimalutvecklingen gör att man inte kan."
  - Ledtråd: "Om mängder inte är åtskilda (inte disjunkta) lappar de över varandra och... ..nyckelordet 'och'..."
  - Ledtråd: Om man tar alla reella tal och drar bort alla rationella tal får man ett komplement bestående av...
  - Ledtråd: Ifall snittet är tomma mängden så att...
- K6
- Ledtråd: Dansande par, pokerhänder...
  - Ledtråd: Toalettköer...
  - Ledtråd: Naturliga tal som anger hur många kombinationer man kan...
  - Ledtråd: Överst  $\binom{0}{0}$ , sedan  $\binom{1}{0}$  och  $\binom{1}{1}$  ...
- L1.1 Ledtråd: -5 är faktiskt mindre än +2...
- L1.2 Ledtråd: Nyckelordet "och" är detsamma som "snittet av" eller överlappningen av mängderna medan nyckelordet "eller" är detsamma som "unionen av" eller...
- L1.4 Ledtråd:  $x \in [-2, 2[$  är detsamma som  $-2 \leq x < 2$  och mest konkret är att skissa aktuella intervall på en tallinje för att identifiera snitt respektive unioner...
- K7 Ledtråd: Det finns en formel och en triangel...
- Ö1.42 Ledtråd: Beräkna med formeln och dubbelkolla i triangeln...
- Ö1.46 Ledtråd: Avsnitt 1.2.3 i kurshäftet visar metoden att utveckla...
- K9 Ledtråd: Studera den inramade formeln i kurshäftet på sid 13...
- Ö1.48 Ledtråd: Påbörja en fullständig utveckling och sikta sedan in dig på den term som har grad 6 och till slut får man  $\binom{8}{6} a^2 2^6 = 112 \dots$
- L1.6
- Ledtråd: (Primtals)faktorisera nämnarna, förläng så lite som möjligt till lika nämnare, gemensamt bråkstreck, subtrahera...
  - Ledtråd: Primtalsfaktorisera nämnarna, gör liknämning, förkorta nämnarna och räkna vidare...
  - Ledtråd: Förläng till lika nämnare, gemensamt bråkstreck, subtrahera...
- L1.8
- Ledtråd: Notera att  $(-2)^4 = 16$  medan  $-2^4 = -16$
  - Ledtråd: Notera att  $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$
- L1.9
- Ledtråd: Varje potens för sig innan man multiplicerar ihop dem...
  - Ledtråd: Notera att  $\frac{10^2}{10^{-3}} = 10^{2-(-3)} = 10^5$
- L1.17
- Ledtråd: Potensen beräknas före additionen...

- b) Ledtråd: Potensen beräknas före multiplikationen...
- c) Ledtråd: Notera att  $10^2 \cdot 10^2 = 10^5$
- K2 Ledtråd: Inled med att sätta  $10x = 11.222 \dots$  och sedan  $100x = 112.222 \dots$  för att få samma decimalutveckling...
- K4 Ledtråd: Inled med att sätta  $x = 0.1212 \dots$  och sedan  $100x = 12.1212 \dots$  för att få samma decimalutveckling...
- K8 Ledtråd:  $\binom{8}{5} 1^5 (-2)^3 = \dots$
- K10 Ledtråd:  $\binom{10}{7} 1^7 (-2)^3 = \dots$
- L1.3 Ledtråd: Om man vet att Holgerson är 40 år gammal eller äldre, kan man då säga att han är minst 12 år gammal? Ja det kan man, även om den informationen inte är lika precis...
- L1.5 Ledtråd: Inled med att fundera ut vad vänsterledets snitt respektive unioner anger och fundera sedan om detta garanterar att högerledets påstående är en logisk följd av detta...

## Ämnesdag 2:

K11

- a) Ledtråd: En summa av valfritt antal potenser upphöjda i...
- b) Ledtråd: Ett polynom som man kan dela ett annat polynom med utan att...
- c) Ledtråd: Ett polynom som inte kan delas med annat polynom så att graden sänks utan att...
- d) Ledtråd: Samma som i c)
- e) Ledtråd: Om exempelvis ett polynom har ett nollställe  $x = 5$  så är det...
- f) Ledtråd: Alla polynom av grad 1 eller högre har minst ... men det behöver inte vara ...
- g) Ledtråd: Tredjegradspolynomet  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 2)(x + 3)$  har nollställena  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2$  och  $x_3 = -3$  (totalt 2 + 1 stycken)

Ö1.1

Ledtråd:  
Generellt gäller att

$$\begin{aligned}
 & x^2 + px + q \\
 = & \underbrace{x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{p}{2}x + p^2}_{\text{korrekt inledning som ger kvadraten}} \underbrace{-p^2 + q}_{\text{komplett-eringen}} \\
 = & \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\text{kvadraten}} \underbrace{-p^2 + q}_{\text{komplett-eringen}}
 \end{aligned}$$

och plötsligt har var variabeln  $x$  på enbart *en* plats i uttrycket!

Exempel:

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 7x + 2 \\
 = & x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + \frac{8}{4} \\
 = & \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{41}{4}
 \end{aligned}$$

- a) Ledtråd: Kvadrat räcker och kompletteringen blir noll.
- b) Ledtråd:  $x^2 - 6x = x^2 - 3x - 3x + 9 - 9 + 0 = \dots$
- c) Ledtråd: Tvåan hålls utanför enligt  $2x^2 + 2x - 1 = 2\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) = \dots$
- d) Ledtråd: -1 hålls utanför enligt  $-x^2 + x + 1 = -(x^2 - x - 1) = \dots$

Ö1.14

- a) Ledtråd: Konjugatregeln baklänges
- b) Ledtråd: Nollstället  $x = -1$  tillsammans med faktorsatsen ger oss den ena faktorn – den andra fås genom polynomdivision...
- c) Ledtråd: Inled med konjugatregeln baklänges...
- d) Ledtråd: Nollstället  $x = 0$  tillsammans med faktorsatsen ger oss en...
- e) Ledtråd: Inled med konjugatregeln baklänges...

Ö1.12

Ledtråd: Polynomdividera och var noga med att alla termer hamnar i kolumner med samma grad.

L1.40

- a) Ledtråd: Lös ut  $x$ ...
- b) Ledtråd: Subtrahera med 10 och kvadratkomplettera...

L1.42

- a) Ledtråd: Kvadratkomplettera...
- b) Ledtråd: Skriv på normalform med *en*  $x^2$ -term och noll i högerledet, kvadratkomplettera...

L1.52

- a) Ledtråd: Skriv på normalform med *en*  $x^2$ -term och noll i högerledet, kvadratkomplettera...
- b) Ledtråd: Skriv på normalform med *en*  $x^2$ -term och noll i högerledet, kvadratkomplettera...

L1.25

- a) Ledtråd: Lös ut  $x$ ...
- b) Ledtråd: Gör liknämigt, noll i högerledet, fundera över vilka värden på  $x$  som nollställer täljaren utan att nämnaren nollställs...

- c) Ledtråd: Skriv på normalform med  $en x^2$ -term och noll i högerledet, kvadratkomplettera...
- d) Ledtråd: Gör liknämnt, noll i högerledet, fundera över vilka värden på  $x$  som nollställer täljaren utan att nämnaren nollställs...

K12 Ledtråd: Gissa en rot, dividera bort motsvarande faktor genom polynomdivision...

K13 Ledtråd: Gissa en rot, dividera bort motsvarande faktor genom polynomdivision...

L1.51

- a) Ledtråd: Kvadrera ledvis, sortera, lös den nya ekvationen men kom ihåg att denna "gradhöjning" kan ge "skenrötter"...
- b) Ledtråd: Kvadrera ledvis, sortera, lös den nya ekvationen men kom ihåg att denna "gradhöjning" kan ge "skenrötter"...

L1.53

- a) Ledtråd: Får roten ensam, kvadrera ledvis, sortera, lös den nya ekvationen men kom ihåg att denna "gradhöjning" kan ge "skenrötter"...
- b) Ledtråd: Får roten ensam, kvadrera ledvis, sortera, lös den nya ekvationen men kom ihåg att denna "gradhöjning" kan ge "skenrötter"...

L1.60

- a) Ledtråd: Sätt noll i högerledet, gissa rot, polynomdividera...
- b) Ledtråd: Sätt noll i högerledet, gissa rot, polynomdividera...
- c) Ledtråd: Sätt noll i högerledet, gissa rot, polynomdividera...
- d) Ledtråd: Sätt noll i högerledet, gissa rot, polynomdividera...

### Ämnesdag 3:

K15 Ledtråd: Sätt ekvationerna lika med varandra och kom ihåg att kvadrering kan ge skenrötter...

K17 Ledtråd: Gauss-eliminering – alltså addera eller subtrahera ekvationer till/från varandra för att få trappstegsstruktur...

K19 Ledtråd: Två obekanta av grad ett ger två räta linjer (i ett plan) vilka...

K21 Ledtråd: Faktorisera nämnare, välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem eller handpåläggning...

K22 Ledtråd: Faktorisera nämnare, välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem eller handpåläggning...

K25 Ledtråd: Välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem...

K28 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämnt, ett bråkstreck, faktorisera, nollställ täljaren, håll koll på förbjudna värden...

K14 Ledtråd: Sätt ekvationerna lika med varandra, lös andragradsekvationen, till varje  $x$  knyts ett  $y$ ...

K16 Ledtråd: Sätt ekvationerna lika med varandra och kom ihåg att kvadrering kan ge skenrötter...

K18 Ledtråd: Gauss-eliminering – alltså addera eller subtrahera ekvationer till/från varandra för att få trappstegsstruktur...

K20 Ledtråd: Tre obekanta av grad ett ger tre räta plan (i ett rum) vilka...

K23 Ledtråd: Välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem...

K24 Ledtråd: Välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem...

K26 Ledtråd: Faktorisera nämnare, välj ansats enligt läroboken sid 252 och lös med hjälp av ekvationssystem...

K27 Ledtråd: Graden i täljaren är minst lika hög som (i detta fall högre än) nämnarens så polynomdivision måste föregå partialbråksuppdelningen. Ett rationellt uttryck med resten i täljaren partialbråksuppdelas sedan...

K29 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämnt, ett bråkstreck, faktorisera, nollställ täljaren, håll koll på förbjudna värden...

L1.54 Ledtråd: Lös ut  $x$  i den övre ekvationen och sätt in uttrycket...

2016.2 Ledtråd: Gissa rot, polynomdividera, faktorisera...

2015.1 Ledtråd: Gissa rot, polynomdividera, faktorisera, kontrollera svaren...

2014.2 Ledtråd: Faktorisera nämnaren och partialbråksuppdelning efter lämplig ansats...

2013.1 Ledtråd: Kvadrera ledvis och glöm inte att skenrötter kan uppkomma...

2012.3 Ledtråd: Gissa rot, polynomdividera, faktorisera, kontrollera svaren...

2011.3 Ledtråd: Faktorisera nämnaren och partialbråksuppdelning efter lämplig ansats...

2010.1 Ledtråd: Rotuttrycket ensamt i vänsterledet, kvadrera ledvis...

2009.3 Ledtråd: Faktorisera nämnaren och partialbråksuppdelning efter lämplig ansats...

2008.2 Ledtråd: Gissa rot, polynomdividera, faktorisera, kontrollera svaren...

### Ämnesdag 4:

K30 Ledtråd: Teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...

K32 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställena för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktorerade olikheten...

K34 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställena för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktorerade olikheten...

K36 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämnt, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...

K39 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera...

K31 Ledtråd: Teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...

K33 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställena för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktorerade olikheten...

K37 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställena för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktorerade olikheten...

- K38 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- K35 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- K40 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera...
- L1.62
- a) Ledtråd: Lös ut  $x$ ...
- b) Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- L1.68
- a) Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- b) Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2015.2 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2014.3 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2013.3 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2012.1 Ledtråd: Faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2011.2 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställen för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktoriserade olikheten...
- 2010.3 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...
- 2009.1 Ledtråd: Studera vänsterledet för sig genom att gissa nollställen för att kunna faktorisera med hjälp av faktorsatsen efter polynomdivision, teckenstudera den faktoriserade olikheten...
- 2008.3 Ledtråd: Noll i högerledet, liknämning, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera, håll koll på förbjudna värden...

#### Ämnesdag 5:

- L1.63 Ledtråd: Beräkna innehållet innanför de raka parenteserna, byt tecken om resultatet blir negativt
- K41 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K43 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K45 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- L1.65
- a) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera det värde som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för två olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- b) Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- L1.66
- a) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för två olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- b) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K49 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K42 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K44 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- K46 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- L1.69
- a) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för två olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- b) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för två olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- c) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om ekvationen för fyra olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- L1.70
- a) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- b) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...
- L1.104 Ledtråd:
- a) Ledtråd: Skriv på normalform och kvadratkomplettera...
- b) Ledtråd: Skriv på normalform och kvadratkomplettera...

- c) Ledtråd: Noll i högerledet, liknämigt...
- d) Ledtråd: Noll i högerledet, gissa rot, polynomdividera...
- e) Ledtråd: Rotuttrycket ensamt i vänsterledet, kvadrera ledvis...
- f) Ledtråd: Rotuttrycket ensamt i vänsterledet, kvadrera ledvis...
- g) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppen, skriv om olikheten för tre olika fall...

L1.105

- a) Ledtråd: Noll i högerledet, faktorisera vänsterledet vilket kräver kvadratkomplettering, hotta nollställena, utnyttja faktorsatsen, teckenstudera den faktorerade olikheten...
- b) Ledtråd: Faktorisera vänsterledet genom rotgissning och polynomdivision, teckenstudera den faktorerade olikheten...
- c) Ledtråd: Noll i högerledet, lika nämnare, ett bråkstreck, faktorisera, teckenstudera den faktorerade olikheten och håll koll på förbjudna värden...
- d) Ledtråd: Lös den vänstra olikheten för sig, den högra för sig och välj snittet av de båda lösningsmängderna...
- e) Ledtråd: Lös den vänstra olikheten för sig (två fall), den högra för sig och välj snittet av de tre lösningsmängderna...
- f) Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppet eller är förbjudet, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...

K47 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppet, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...

K48 Ledtråd: Teckna en tallinje och markera de värden som nollställer absolutbeloppet, skriv om ekvationen för tre olika fall, lös varje fall och begränsa delsvaren så att de håller sig inom aktuella intervall...

## Kapitel 2

### Ämnesdag 6:

- K1 Ledtråd: Varje funktionsvärde får endast härstamma från ...
- K3 Ledtråd: Vilka  $x$ -värden är funktionen  $f(x) = e^x$  definierad för, vilka  $y$ -värden kan funktionen  $f(x) = e^x$  ge, skissa kurvan, spegelvänd allt ovan för att få inversens egenskaper, kontrollera genom att skissa funktion och invers samt symmetrilinjen  $y = x$  i appen Desmos...
- K5 Ledtråd: Tag fram inversen  $f^{-1}(x) = e^x + 4$  som är enklare att resonera med, gör på samma sätt som i K3 och få den ordinarie funktionens egenskaper genom att spegla inversens... Glöm ej att kontrollera i Desmos.
- K8 Ledtråd: Tag fram inversen  $f^{-1}(x) = 10^x$  som är enklare att resonera med, gör på samma sätt som i K3 och få den ordinarie funktionens egenskaper genom att spegla inversens... Glöm ej att kontrollera i Desmos.
- K9 Ledtråd: Till en början kom ihåg att exempelvis  $\sqrt{9} = 3$ , inte  $-3$  som många tror av gammal vana efter lösning av andragradsekvationer som ofta får två svar. Vilka  $x$ -värden är funktionen  $f(x) = \sqrt{x}$  definierad för, vilka  $y$ -värden kan funktionen  $f(x) = \sqrt{x}$  ge, skissa kurvan, spegelvänd allt ovan för att få inversens egenskaper, kontrollera genom att skissa funktion och invers samt symmetrilinjen  $y = x$  i appen Desmos men kom ihåg att enbart den högra halvan  $f^{-1}(x) = x^2$  visar sig vara av intresse...
- K10 Ledtråd: Vilka  $x$ -värden är funktionen  $f(x) = \sqrt{4-x}$  definierad för, vilka  $y$ -värden kan funktionen  $f(x) = \sqrt{4-x}$  ge, skissa kurvan, spegelvänd allt ovan för att få inversens egenskaper, kontrollera genom att skissa funktion och invers samt symmetrilinjen  $y = x$  i appen Desmos men kom ihåg att enbart den högra halvan av  $f^{-1}(x) = 4 - x^2$  visar sig vara av intresse.....
- K12 Ledtråd: Funktioner som saknar invers har  $y$ -värden som härstammar från två eller flera  $x$ -värden vilket stämmer hos exempelvis... Funktioner som har invers har  $y$ -värden som enbart härstammar från ett  $x$ -värden vilket stämmer hos exempelvis...
- Ö3.1 Ledtråd: Om man sätter in ett  $x$ -värde i en funktion får man enbart ett  $y$ -värde såsom  $f(x) = \sqrt{x}$  enbart ger funktion  $y$ -värdet 9 om man sätter in-värdet 81. Detta gör att en funktionskurva aldrig kan passera två eller flera  $y$ -värden för ett och samma  $x$ -värde vilket sker i...
- Ö3.2 Ledtråd: Ersätt  $x$  i funktionen med det som står i parentes och förenkla...
- Ö3.3 Ledtråd: Vilka  $x$ -värden är OK att sätta in? Vilka  $y$ -värden kan man få fram? Kontrollera gärna genom att skissa kurvan i Desmos.
- Ö3.8 Ledtråd: Värdemängden kan bestämmas efter att funktionerna skrivits om med hjälp av kvadratkomplettering så att exempelvis  $f(x) = x^2 - 2x + 2 = \dots = (x - 1)^2 + 1$  och  $f(x) = x^2 + px + q = \dots = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$ . Fundera sedan över vilket  $x$ -värde som ger lägst svar respektive högst svar...
- K13 Ledtråd: Vi börjar innerst om jobbar oss utåt... Sätt in  $x = 2$  i funktionen, sätt in  $x = 8$  i inversen, addera delsvaren och sätt in i funktionen...
- K15 Ledtråd: Vi börjar innerst om jobbar oss utåt... Sätt in  $x = 9$  i inversen, sätt in  $x = 4$  i funktionen, subtrahera delsvaren och sätt in i funktionen...
- K18 Ledtråd: Vi börjar innerst om jobbar oss utåt... Sätt in  $x = e^5$  i funktionen, subtrahera med 3 och sätt in i inversen...
- K19 Ledtråd: Skissa  $f(x) = \sqrt{x}$  respektive  $f(x) = -\sqrt{x}$  och fundera sedan över vilken halva av  $f(x) = x^2$  som är invers till vilken funktion...
- K20 Ledtråd: Bestäm först  $D_f$ ; annars finns risken att man svarar med förbjudna  $x$ -värden efter att vissa lösningssteg ej innehållit ekvivalens. Första logaritmlagen utnyttjas i båda leden så att varje led enbart innehåller en logaritm. Tag sedan basen  $e$  upphöjt i respektive led så att naturliga logaritmen elimineras, lös erhållen andragradsekvation...

- K21 Ledtråd: Bestäm först  $D_f$ ; annars finns risken att man svarar med förbjudna  $x$ -värden efter att vissa lösningssteg ej innehållit ekvivalens. Ett av flera sätt: Andra logaritmlagen utnyttjas i båda leden så att varje led enbart innehåller en logaritm. Tag sedan basen  $e$  upphöjt i respektive led så att naturliga logaritmen elimineras, lös erhållen ekvation med rationella uttryck genom att sätta noll i högerledet, göra liknämning och nollställa täljaren utan att nämnaren nollställs...
- Ö3.27 Ledtråd: Fall 1, 3, 5, 6, 9, 10, 11 och 12 kan skrivas om med hjälp av logaritmlagar och potensregler – inte fall 2, 7, 8...
- K65 Ledtråd och svar: Skissa funktionens kurva för några olika  $k$ -värden. Som synes får man en funktion som saknar invers om  $k < 2$  (funktionen blir ej injektiv) medan för  $k \geq 2$  blir funktionen injektiv och har invers.
- K66 Ledtråd och svar: När man skissar funktionskurvan ser man att funktionen är injektiv (varje  $y$ -värde härstammar enbart från ett  $x$ -värde) trots att funktionen varken är strängt växande eller strängt avtagande. Därmed har funktionen invers.
- K2 Ledtråd: Spegelbild i förhållande till...
- K4 Ledtråd: Ledtråd: Vilka  $x$ -värden är funktionen  $f(x) = 1 - e^x$  definierad för, vilka  $y$ -värden kan funktionen  $f(x) = 1 - e^x$  ge, skissa kurvan, spegelvänd allt ovan för att få egenskaper hos inversens  $f(x) = \ln(1 - x)$ , kontrollera genom att skissa funktion och invers samt symmetrilinjen  $y = x$  i appen Desmos...
- K6 Ledtråd: Tag fram inversen  $f^{-1}(x) = e^x - 3$  som är enklare att resonera med, gör på samma sätt som i K3 och få den ordinarie funktionens egenskaper genom att spegla inversens... Glöm ej att kontrollera i Desmos.
- K7 Ledtråd: Tag fram inversen  $f^{-1}(x) = 2 - e^x$  som är mindre svår att resonera med, gör på samma sätt som i K3 och få den ordinarie funktionens egenskaper genom att spegla inversens... Glöm ej att kontrollera i Desmos.
- K11 Ledtråd: Ledtråd: Vilka  $x$ -värden är funktionen  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$  definierad för, vilka  $y$ -värden kan funktionen  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$  ge, skissa kurvan, spegelvänd allt ovan för att få egenskaper hos inversens  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$  (enbart höger halva), kontrollera genom att skissa funktion och invers samt symmetrilinjen  $y = x$  i appen Desmos...
- K14 Ledtråd: Börja innerst såsom i K13...
- K16 Ledtråd: Börja innerst såsom i K13...
- K17 Ledtråd: Börja innerst såsom i K13...

#### Ämnesdag 7:

- K22 Ledtråd: Eftersom att  $\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$  så får inte  $b$  eller  $\cos x$  anta värdet 0 vilket inträffar...
- K23 Ledtråd: Tag hjälp av hjälptriangel "halv liksidig triangel" och placera in den i enhetscirkeln...
- K24 Ledtråd: Tag hjälp av hjälptriangel "halv liksidig triangel" och placera in den i enhetscirkeln...
- K26 Ledtråd: Vilka svar kan bråket  $\frac{a}{b}$  ge?
- K27 Ledtråd:  $\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$ , rita triangel i tredjekvadranten av enhetscirkeln och beräkna närliggande katet delat med hypotenusan...
- K28 Ledtråd: Utnyttja att  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ...
- K29 Ledtråd: Rita en hjälptriangel, beräkna hypotenusans längd  $c$ , beräkna  $\cos x = \frac{b}{c}$ ...
- K32 Ledtråd: Utnyttja Pythagoras' sats eller triggettan...
- K33 Ledtråd: Beräkna  $\cos x$  och använd "sinus för dubbla vinkeln"...
- K35 Ledtråd: Använd "sinus för dubbla vinkeln", noll i högerledet, faktorisera... Notera att det aldrig är tillåtet att "dividera bort en variabel"!
- K38 Ledtråd: Variabelskifte  $t = \sin x$ ...
- K39 Ledtråd: Variabelskifte  $t = \sin x$ ...
- L2.27 Ledtråd: Hypotenusan  $c = 5$  och motstående katetens längd fås med hjälp av...
- L2.30 Ledtråd:  
a) Variabelskifte  $t = \cos x$ ...  
b) Triggettan och variabelskifte  $t = \sin x$ ...
- L2.36 Ledtråd: Kontrollera i vilken kvadrant  $u$  respektive  $v$  finns i enhetscirkeln samt vilket tecken  $\cos u$  respektive  $\cos v$  har. Beräkna sedan  $\sin(u + v)$  och  $\cos(u - v)$  med hjälp av additions- respektive subtraktionssats.
- K25 Ledtråd: För vilka vinklar gäller att  $\frac{\sin x}{\cos x} > 1$ ?
- K30 Ledtråd: Triggettan...
- K31 Ledtråd:  $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \dots$
- K34 Ledtråd:  $a = b$  vilket inträffar vid vinklarna...
- K36 Ledtråd:  $5x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ...
- K37 Ledtråd:  $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

#### Ämnesdag 8:

- K40 Ledtråd:  $\arccos x$  har värdemängd  $[0, \pi]$  – alltså första och andra kvadranten. Kontrollera i enhetscirkeln vilken cosinus-kordinat som ger rätt vinkel...

- K41 Ledtråd:  $\arccos x$  har värdemängd  $[0, \pi]$  – alltså första och andra kvadranten. Kontrollera i enhetscirkeln vilken cosinus-koordinat som ger rätt vinkel...
- K42 Ledtråd: Så bra, en nollprodukt, nollställ en faktor i taget...
- K44 Ledtråd: Fyra positioner i enhetscirkeln är av intresse för  $\tan x = \pm 1$ ...
- K45 Ledtråd: Variabelskifte  $t = \cos x$ ...
- K47 Ledtråd:  $\arcsin x$  har värdemängd  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  – alltså första och fjärde kvadranten...
- K48 Ledtråd: "Sinus för dubbla vinkeln", noll i högerledet, faktorisera till nollprodukt... Notera att det aldrig är tillåtet att "dividera bort en variabel"!
- K49 Ledtråd:  $\arctan x$  har värdemängd  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  – alltså inre vinklar i första och fjärde kvadranten...
- K50 Ledtråd: Triggettan, kända trigvärden...
- L2.49 Ledtråd: Sätt in värdena i arcusfunktionerna och fundera över vilka vinklar de ger som funktionsvärde...
- L2.50 Ledtråd: Sätt in värdena i  $\arctan x$  och fundera över vilka vinklar man får som funktionsvärde...
- L.2.51
- Ledtråd: Triggettan, variabelskifte...
  - Svår... Ledtråd:  $\tan x = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v}$ , liknämngt, noll i högerledet, gemensamt bråkstreck, faktorisera täljaren...
- L2.52 Ledtråd:
- Ledtråd: Fundera över vilken sinus-koordinat i enhetscirkeln som ger vinkeln  $\frac{\pi}{6}$ ...
  - Ledtråd: Vinkeln är känd och tangens-värdet är sökt, vi vet att  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , bestäm  $\sin x$  och  $\cos x$  för aktuell...
  - Cosinus i båda leden ger  $\cos(\arcsin x) = 2x$  och triggettan ger  $\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 2x$ ...

### Ämnesdag 9:

- K51 Ledtråd: Omskrivning av vänsterledet tills det stämmer med högerledet, ersätt nämnaren i VL med hjälp av triggettan, faktorisera nämnaren, förkorta...
- K52 Ledtråd: Omskrivning av vänsterledet tills det stämmer med högerledet, ersätt  $\tan x$  med  $\frac{\sin x}{\cos x}$ , förläng VL med  $\cos x$ , faktorisera nämnaren, förkorta, förläng med  $2 \sin x$ , ersätt nämnaren med "sinus för dubbla vinkeln"...
- K53 Ledtråd: Omskrivning av vänsterledet tills det stämmer med högerledet, ersätt 1 enligt triggettan, dividera termvis...
- K56 Ledtråd: Injektiv funktion har invers...
- K57 Ledtråd: Studera kurvan. Vilket intervall är mest tilltalande för att skapa en injektiv funktion...
- K58 Ledtråd: Studera kurvan. Vilket intervall är mest tilltalande för att skapa en injektiv funktion...
- K59 Ledtråd: Studera kurvan. Vilket intervall är mest tilltalande för att skapa en injektiv funktion...
- K60 Ledtråd: Skapa en hjälptriangel med  $b = x$  och  $c = 1$ , beräkna  $a$ ...
- K61 Ledtråd: Notera att  $\sin x$  och  $\arcsin x$  enbart är varandras invers i första och fjärde kvadranten, börja innerst...
- K43 Ledtråd: Ersätt högerledet, noll i högerledet, gemensamt bråkstreck, faktorisera täljaren, noll i täljaren utan att nämnaren nollställs...
- K46 Ledtråd: Vilken sinuskoordinat i första eller fjärde kvadranten ger aktuell vinkel...
- Ö3.51 Ledtråd:
- Ledtråd:  $\sin x$  är alltid invers till  $\arcsin x$  förutsatt att  $\arcsin x$  "matas" med ett värde inom definitionsmänden...
  - Ledtråd:  $\cos x$  är alltid invers till  $\arccos x$  förutsatt att  $\arccos x$  "matas" med ett värde inom definitionsmänden...
  - Ledtråd: Ersätt sinus enligt triggettan,  $\cos x$  är alltid invers till  $\arccos x$  förutsatt att  $\arcsin x$  "matas" med ett värde inom definitionsmänden... Även hjälptriangel med  $b = 1$ ,  $c = 3$  och  $a = \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$  är en smidig väg...
  - Ledtråd: Hjälptriangel med  $a = \pi$ ,  $b = 1$  och  $c = \sqrt{1 + \pi^2}$  ...
  - Ledtråd: Hjälptriangel med  $b = 1$ ,  $c = 4$  och  $a = \sqrt{15}$  ...
- Ö3.52 Ledtråd:
- Ledtråd:  $\arccos x$  är bara invers till  $\cos x$  inom första och andra kvadranten...
  - Ledtråd:  $\cos x$  är alltid invers till  $\arccos x$  förutsatt att  $\arccos x$  "matas" med ett värde inom definitionsmänden...
  - Ledtråd:  $\arctan x$  är bara invers till  $\tan x$  inom det öppna intervallet av första och fjärde kvadranten...
- L2.54
- Ledtråd: Tangens i båda leden ger  $\tan(\arccos x) = x$ , VL förenklas med hjälptriangel med  $b = x$ ,  $c = 1$  och  $a = \sqrt{1 - x^2}$  vilket ger  $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2x$ ...
  - Ledtråd: Tangens i båda leden ger  $\tan(\arcsin x) = 2x$ , VL förenklas med hjälptriangel med  $a = x$ ,  $c = 1$  och  $b = \sqrt{1 - x^2}$  vilket ger  $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = x$ , kvadrering och  $t = x^2$  och glöm inte vilka värden  $\arccos x$  kan "svälja"...
- K54 Ledtråd: Liknämngt i VL, gemensamt bråkstreck, faktorisera täljaren...
- K55 Ledtråd: Ersätt  $\tan^2 x$ , ersätt nämnaren enligt triggettan...
- K62 Ledtråd: Först inser man att tillåtna  $x$ -värden är  $x < 1$ . Förkortning av HL så att  $x^2 + \lg(1 - x) - \lg 25 = \frac{1}{2} \lg(1 - x)^2 - 2 \lg 20$ , högerledet skrivs om med logaritmlagar så att  $x^2 + \lg(1 - x) - \lg 25 = \lg(1 - x) - \lg 400$ ...
- K63 Ledtråd: Låt  $t = 3^{-x}$ ...
- K64 Ledtråd: Först inser man att tillåtna  $x$ -värden är  $x < 0$ . Första logaritmlagen ger...
- L2.70 Ledtråd: Först inser man att tillåtna  $x$ -värden är  $x < 0$

L2.73

- a) Ledtråd: Hjälptriangel...
- b) Ledtråd: Hjälptriangel...

Ämnesdag 10:

L2.14

- a) Ledtråd: Tillåtna  $x$ -värdena kontrolleras inledningsvis,  $x > 0$ , första logaritmlagen i båda leden,  $e$  upphöjt i respektive led...
- b) Ledtråd: Tillåtna  $x$ -värdena kontrolleras inledningsvis:  $x > \sqrt{2}$  fås genom lösning av  $x^2 - 2 > 0$  i snitt med  $x > 0$ , första logaritmlagen i båda leden,  $e$  upphöjt i respektive led...

L2.16

a) Ledtråd:  $8^{-\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4} = \dots$

b) Ledtråd:  $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \dots$

L2.17 Ledtråd:

- a) Låt  $t = e^x$ ...
- b) Ledtråd:  $9^x + 8 \cdot 3^{x-1} - 1 = (3^2)^x + 8 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x - 1 = (3^x)^2 + \frac{8}{3}3^x - 1 = 0$   
Låt  $t = 3^x$  så att  $t^2 + \frac{8}{3}t - 1 = 0$  och kvadratkomplettera...
- c) Ledtråd: Låt  $t = e^x$  och lös andragradsolikheten genom faktorisering och teckenstudie, tänk på att  $e^x > 0$  och därmed  $t > 0$ ...

L2.21

- a) Ledtråd: Notera inledningsvis att  $x > -1$ , flytta över en term till högerledet, första logaritmlagen,  $e$  upphöjt i respektive led...
- b) Ledtråd: Notera inledningsvis att  $x > 1$ , första logaritmlagen,  $e$  upphöjt i respektive led...
- c) Ledtråd: Låt  $t = e^x$  och lös tredjegradslikheten genom rotgissning och polynomdivision, tänk på att  $e^x > 0$  och därmed  $t > 0$ ...
- d) Ledtråd: Låt  $t = 3^{\frac{x}{2}}$  och lös andragradslikheten genom kvadratkomplettering och polynomdivision, tänk på att  $3^{\frac{x}{2}} > 0$  och därmed  $t > 0$ ...
- e) Ledtråd: Olikheterna  $x^2 - 4 > 0$  och  $x + 2 > 0$  ger inledningsvis ett snitt av tillåtna  $x$ -värden  $x > 2$ . Tag  $e$  upphöjt i respektive led, lös andragradsolikheten genom faktorisering och teckenstudium, glöm ej att kombinera lösningsmängden med kravet på  $x$ ...
- f) Ledtråd: Låt  $t = 2^x$ , lös andragradsolikheten genom faktorisering och teckenstudium, tänk på att  $2^x > 0$  och därmed  $t > 0$ ...

L2.22 Ledtråd:

- a) Ledtråd: Om den känns svår kan det vara bra att istället skissa inversen och spegla den i  $y = x$ ...
- b) Ledtråd: Skissa inversen och spegla den i  $y = e^{x-1}$  för  $x > 1$  och spegla sedan i sidled...

L2.23 Ledtråd:

- a) Ledtråd: Omskrivning från  $y = \frac{e^x}{e^{x+1}}$  till  $y = 1 - \frac{1}{e^{x+1}}$  gör det hela enklare...
- b) Ledtråd: Omskrivning från  $y = e^{2x} - 2e^x$  genom kvadratkomplettering till  $y = (e^x - 1)^2 - 1$  gör det hela enklare och minimum fås då parentesen innehållande  $e^x - 1 = 0$ ...
- c) Ledtråd: Funktionen  $y = \ln(e^x - 1)$  kräver att  $e^x - 1 > 0$  så att  $e^x > 0$ ...

L2.33

- a) Ledtråd: Sinus för dubbla vinkeln, noll i högerledet, faktorisera...
- b) Ledtråd: Cosinus för dubbla vinkeln på  $\cos 4v$ , triggettan, faktorisera...
- c) Ledtråd: Motsatta sinusvärden med vinkelförskjutning  $\pi/3$ ...
- d) Ledtråd: Tangens för dubbla vinkeln, noll i högerledet, gemensamt bråkstreck, nollställ täljaren...

Ö3.49

- a) Ledtråd: Parentesen måste ge värdet 1...
- b) Ledtråd: Parentesen måste ge värdet  $\frac{1}{2}$ ...
- c) Ledtråd: Parentesen måste ge värdet  $\frac{1}{2}$ ...
- d) Ledtråd: Parentesen måste ge värdet 0...
- e) Ledtråd: Parentesen måste ge värdet  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ...
- f) Ledtråd: Värdemängden för  $\arcsin x$ ...

Ö3.50 Ledtråd: Bestäm  $x$  och sätt in...

Ö3.27 Ledtråd: (Repris) Fall 1, 3, 5, 6, 9, 10, 11 och 12 kan skrivas om med hjälp av logaritmlagar och potensregler – inte fall 2, 7, 8...

Ö3.28 Ledtråd: Notera att  $x > -\frac{1}{2}$ , nämnaren till högerledet, tredje logaritmlagen,  $e$  upphöjt i...

Ö3.31

- a) Ledtråd: Notera att  $x > 0$ , första logaritmlagen,  $e$  upphöjt i...
- d) Ledtråd: Omskrivning från  $y = \ln(3^x + 3^{x+1})$  till  $y = \ln(4 \cdot 3^x)$  gör det hela enklare...

Ö3.32 Ledtråd:

$$\begin{aligned} & \ln\left(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})\right) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) \\ &= \ln x + \ln(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x}) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) = \dots = \dots \end{aligned}$$

$$= \ln x + \ln \left( \sqrt{e^x(e^{-x} + 1)}(1 + e^{-x}) + \sqrt{1 + e^x} - \sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x} \right) = \dots = \dots$$

$$= \ln x + \ln \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x} = \dots = \dots = \ln x - \frac{x}{2}$$

Ö3.39 Ledtråd: Konjugatregeln baklänges, trigettan i ena parentesen, cosinus för dubbla vinkeln i den andra...

## Kapitel 3

### Ämnesdag 11:

K1 Ledtråd: Lika avstånd till origo men i olika "riktningar"...

K2 Ledtråd: Skissa talet i talplanet före och efter multiplikationen resp. divisionen med  $i$ ...

K9 Ledtråd: Kvadratkomplettera och  $\pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16i^2} = \pm 4i$ ...

K10 Ledtråd: Faktorisera och nollställ respektive andragsgradsfaktor med hjälp av kvadratkomplettering...

K11 Ledtråd: Gissa en rot, polynomdivision och faktorsatsen, nollställ andragsgradsfaktorn med hjälp av kvadratkomplettering...

L1.90 Ledtråd: Addera eller subtrahera realdelar för sig och imaginärdelar för sig...

L1.91 Ledtråd: Pythagoras' Sats för varje absolutbelopp, vid just multiplikation fungerar  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ...

Ö2.1 Ledtråd: Ange realdel respektive imaginärdel...

Ö2.3

a) Ledtråd: Realdelar för sig och imaginärdelar för sig...

b) Ledtråd: Realdelar för sig och imaginärdelar för sig...

c) Ledtråd: Parentesmultiplikation...

d) Ledtråd: 1 ...

e) Ledtråd: Parentesmultiplikation med tre parenteser, alla  $i^2 = -1$ ...

f) Ledtråd: Parentesmultiplikation med tre parenteser, alla  $i^2 = -1$ ...

Ö2.5

a) Ledtråd: "Taket" betyder konjugat och innebär teckensifte för imaginärdelen...

b) Ledtråd: "Taket" betyder konjugat och innebär teckensifte för imaginärdelen...

c) Ledtråd: Imaginärdel saknas...

d) Ledtråd: Teckensifte för imaginärdelen i ena parentesen – sedan parentesmultiplikation...

e) Ledtråd: "Avstånd till origo"...

f) Ledtråd: "Avstånd till origo"...

g) Ledtråd: "Avstånd till origo"...

h) Ledtråd: "Avstånd till origo"...

Ö2.7

a) Ledtråd: Förläng med nämnarens konjugat, förenkla alla  $i^2 = -1$ ...

b) Ledtråd: Förläng med nämnarens konjugat, förenkla alla  $i^2 = -1$ ...

c) Ledtråd: Förläng med nämnarens konjugat, förenkla alla  $i^2 = -1$ ...

d) Ledtråd: Inled parentesmultiplikation...

e) Ledtråd: Förläng med nämnarens konjugat, förenkla alla  $i^2 = -1$ ...

Ö2.8

a) Ledtråd: "Avstånd till origo"...

b) Ledtråd: "Avstånd till origo" för konjugatet...

c) Ledtråd: Kvadrering, "avstånd till origo"...

Ö2.12

a) Ledtråd: Markera "alla punkter med avståndet 2 till origo"...

b) Ledtråd: Markera "alla punkter med imaginärdelen = 4, oavsett realdel"...

c) Ledtråd: Skugga "alla punkter med positiv realdel, oavsett imaginärdel"...

d) Ledtråd: Markera "alla punkter vars summa av realdel och imaginärdel = 4"...

L1.118

a) Ledtråd: Parentesmultiplikation och förenkling...

b) Ledtråd: Förläng med nämnarens konjugat, förenkla alla  $i^2 = -1$ ...

c) Ledtråd: Inled parentesmultiplikation...

L1.119

a) Ledtråd: Notera att  $|(3 + 5i)^3| = |3 + 5i|^3$

b) Ledtråd: Notera att  $\left| \frac{4-5i}{2+3i} \right| = \frac{|4-5i|}{|2+3i|}$

c) Ledtråd: Tillskillnad från vid produkt eller kvot måste man (vid summa eller differens) förenkla fullständigt innan absolutbeloppet beräknas...

L1.120

a) Ledtråd: Alla punkter med lika avstånd till punkten 3 som avstånd till punkten  $-1$ ...

b) Ledtråd: Alla punkter med större avstånd till  $i$  än avstånd till punkten 1...

c) Ledtråd: Alla punkter med ett avstånd till  $i$  som är mindre än 3...

d) Ledtråd: Alla punkter med dubbelt så stort avstånd till  $4i$  som avstånd till  $i$ ...

K3 Ledtråd: Välj ett godtyckligt komplext tal med både realdel och imaginärdel, helst ett tal med känt argument, beräkna absolutbeloppet, kvadrera talet och bestäm det nya argumentet och absolutbeloppet – studera hur argumentet och absolutbeloppet förändras...

K4 Ledtråd: Välj två godtyckliga komplexa tal med både realdel och imaginärdel, helst ett tal med kända argument, beräkna deras absolutbelopp, multiplicera talen och bestäm argumentet och absolutbeloppet hos produkten – studera hur argumentet och absolutbeloppet förändras...

K5 Ledtråd: Välj två godtyckliga komplexa tal med både realdel och imaginärdel, helst ett tal med kända argument, beräkna deras absolutbelopp, dividera talen och bestäm argumentet och absolutbeloppet hos kvoten – studera hur argumentet och absolutbeloppet förändras...

Ö2.13

a) Ledtråd: Alla punkter med avståndet 2 till origo...

b) Ledtråd: Alla punkter med avståndet 3 till punkten 1...

c) Ledtråd: Alla punkter med avståndet 3 till punkten 1...

d) Ledtråd: Alla punkter med avståndet 3 eller mindre till origo...

e) Ledtråd: Alla punkter med avståndet 3 eller större till origo...

f) Ledtråd: Alla punkter med avstånd mellan 2 och 4 (inklusive randen) till punkten  $-3$ ...

Ö2.24

a) Ledtråd: Argumenten adderas vid multiplikation...

b) Ledtråd: Argumenten subtraheras vid division...

c) Ledtråd: Testa genom att addera några godtyckliga olika och lika tal...

Ö2.48

a) Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen, notera att ett nollställe kan återkomma...

b) Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen...

c) Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen, en andragsgradsfaktor kan vara ett primpolynom vilket man kan kontrollera genom att sätta det lika med noll efter kvadratkomplettering...

Ämnesdag 12:

K8 Ledtråd: Lös ut  $z$  och  $-1 = i^2$ ...

K12 Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen...

K13 Ledtråd: T.ex. med talen  $2 + 2i$  och  $-3 + 3i$ ...

L2.56

a) Ledtråd:  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \dots$

b) Ledtråd:  $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots$

c) Ledtråd:  $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = \dots$

d) Ledtråd:  $e^{i\frac{13\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \dots$

L2.60

a) Ledtråd: Beräkna belopp och bestäm argument,  $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ ...

b) Ledtråd: Det är smart att bryta ut beloppet  $\sqrt{12}$  så att man får ett tal på enhetscirkeln och kan identifiera kända sinus- och cosinuskoordinater enligt:  $3 + i\sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}(3 + i\sqrt{3}) = \sqrt{12}\left(\frac{3}{\sqrt{12}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right) = \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}\right) = \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

c) Ledtråd: "Rakt neråt med"...

L2.61

a) Ledtråd:  $3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \dots$

b) Ledtråd:  $-2e^{-i\frac{\pi}{4}} = -2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \dots$

K15

Ledtråd:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \dots \quad \sin\frac{\pi}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} = \dots$$

K16 Ledtråd: Absolutbeloppen multipliceras och argumenten adderas vid multiplikation, medan absolutbeloppen divideras och argumenten subtraheras vid division...

Ö2.19

a) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

b) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

c) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

d) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

e) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

f) Ledtråd: Argumentet bestäms och sätts in i Eulers första formel, absolutbeloppet bestäms och ger en faktor...

Ö2.20

- a) Ledtråd:  $3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \dots$   
b) Ledtråd:  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \dots$

Ö2.22 Ledtråd: Om vinkeln  $\varphi$  är reell så är hela exponenten rent imaginär så att Eulers första formel gäller och beloppet blir då alltid faktorn framför potensen som i detta fall är en osynlig...

K14 Ledtråd: Som under föreläsningen, Eulers först formel och motsvarande för konjugatet adderas respektive subtraheras, sedan...

L2.58

- a) Ledtråd: Ersätt vänsterledet enligt Eulers formel för cosinus, multiplicera ihop och förenkla vänsterledet...  
b) Ledtråd: Ersätt vänsterledet enligt Eulers formel för sinus, multiplicera ihop och förenkla vänsterledet...

Ö2.23

- a) Ledtråd: Skriv om parentesen på polär form innan potensen beräknas...  
b) Ledtråd: Skriv om parentesen på polär form innan potensen beräknas...  
c) Ledtråd: Skriv om parentesen på polär form innan potensen beräknas...

Ö2.45

- a) Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen...  
b) Ledtråd: Gissa reella nollställen, polynomdividera, faktorisera enligt faktorsatsen...

Ö2.56 Ledtråd: Gissa en rent imaginär rot, eftersom att ekvationen enbart har reella koefficienter (inte annars) är även rotens konjugat en rot. Teckna motsvarande faktorer och multiplicera samman dem så att en reell andragsfaktor fås. Polynomdivision med denna ger...

Ö2.21 Ledtråd: Använd regler för hur argument förändras vid multiplikation och division...

Ämnesdag 13:

K6

- a) Ledtråd: Skugga alla punkter med positiv realdel samt imaginära axeln...  
b) Ledtråd: Skugga alla punkter med ett avstånd  $a$ , eller mindre, till origo...  
c) Ledtråd: Markera alla punkter med ett avstånd 1, till punkten  $2 + i$ ...  
d) Ledtråd: Låt  $x = \operatorname{Re} z$  och  $y = \operatorname{Im} z$ . Längs linjen  $y = x$  i det komplexa talplanet gäller på att  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ ...  
e) Ledtråd: Markera alla punkter som har lika avstånd till punkten  $2 + i$  som till punkten  $i$ ...

K7 Ledtråd: Alla icke-reella rötter förekommer i par som...

K17 Ledtråd:  $e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \dots$

K18 Ledtråd: Låt  $-4 = 4e^{i(\pi+n2\pi)}$  och sedan rotdragning enligt de Moivre...

K19 Ledtråd: Låt  $\frac{25}{i} = \frac{25i}{i^2} = -25i = 25e^{-i(\frac{3\pi}{2}+n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , och sedan rotdragning enligt de Moivre...

K23 Ledtråd: Skriv på polär form innan potensen beräknas...

K24 Ledtråd: Se exempel 3.8.1.2 i kurshäftet

K25 Ledtråd: Se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet

Ö2.37

- a) Ledtråd:  $-16 = 16i^2$   
b) Ledtråd:  $-1 = i^2$   
c) Ledtråd:  $-\frac{9}{4} = \frac{9}{4}i^2$

L2.65

- a) Ledtråd:  $1 = e^{in2\pi}$   
b) Ledtråd:  $-4 = 4e^{i(\pi+n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

K22 Ledtråd: Lösning av ekvationer av viss typ...

L1.102

- a) Ledtråd: Kvadratkomplettering...  
b) Ledtråd: Gissa imaginära rötter...

K20 Ledtråd: Testa att sätta in roten  $z = -i$  ekvationer såsom  $z^2 = 1$ ,  $z^3 = 1$ ,  $z^4 = 1$ ,  $z^5 = 1$ ...

K21 Ledtråd: Skriv högerledet på polär form...

K26 Ledtråd: Ledtråd: Se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet

K27 Ledtråd: Ledtråd: Se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet

K40 Ledtråd: Studera realdelen för sig och imaginärdelen för sig

$$VL = e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

$$HL_{e^{ix}e^{iy}} = \dots = \dots = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i\sin x \cos y + i\cos x \sin y$$

K41 Ledtrådar:

$z_1 = e^{i\pi}$  En enhetsrot...

$z_2 = e^{i3}$   $\pi$  radianer =  $180^\circ$  medan 3 radianer  $\approx 172^\circ$ ...

$z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$  En enhetsrot...

- $z_4 = e^{i\frac{3}{2}}$  En enhetsrot...
- $z_5 = e^{\ln 2}$  Förenkla detta vanliga reella tal
- $z_6 = e^{1+i\frac{\pi}{2}}$  Kan skrivas  $e^1 e^{i\frac{\pi}{2}}$  så att absolutbeloppet och argumentet synliggörs
- $z_7 = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{2}}$  Kan skrivas  $e^{\ln 2} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$  så att absolutbeloppet och argumentet synliggörs
- $z_8 = e^i$  En enhetsrot som kan skrivas  $1e^{i1}$  och 1 radian  $\approx 57^\circ$ ...

K42 Ledtråd: Är verkligen komplexa tal desamma som ickereella tal?

Ö2.41

- a) Ledtråd:  $8 = 8e^{in2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...
- b) Ledtråd:  $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2} + n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...
- c) Ledtråd:  $-16 = 16e^{i(\pi + n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...
- d) Ledtråd:  $1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4} + n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...
- e) Ledtråd:  $-8 = 8e^{i(\pi + n2\pi)}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...
- f) Ledtråd:  $-1 + \sqrt{3}i = 2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + n2\pi)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sedan rotdragning enligt de Moivre...

Ämnesdag 14:

K28 Ledtråd: Till beloppet stora värden skall blir små och de skall argumentet ändras...

K30 Ledtråd:  $f(z) = -z^2 = -1(re^{i\theta})^2 = e^{i\pi} r^2 e^{i2\theta} = r^2 e^{i(2\theta + \pi)}$  visar att absolutbeloppen kvadreras, argumenten fördubblas och ökar sedan med ett halvt varv...

K32 Ledtråd:  $f(z) = 2iz^3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(re^{i\theta})^3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} r^3 e^{i3\theta} = 2r^3 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})}$  visar att absolutbeloppen tas i kubik och fördubblas sedan, argumenten tredubblas och ökar sedan med ett kvarts varv...

K34 Ledtråd: Genom att multiplicera med en enhetsrot bevaras absolutbeloppet med argumentet förändras  $\frac{\pi}{3}$ ...

Ö2.15 Ledtråd: Se Exempeluppgift 3.3.1.2 i kurshäftet...

K29 Ledtråd: Argumenten skall fördubblas och spridas över ett tre gånger så stort intervall, sedan behövs även en kompletterande vridning ett kvarts varv i negativ riktning...

K31 Ledtråd:  $f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{r^2} e^{i(-2\theta)}$  visar att absolutbeloppen inverteras i kvadrat, argumenten fördubblas och byter sedan tecken...

K33 Ledtråd: Argumenten skall fördubblas och spridas över ett dubbelt så stort intervall, sedan behövs även en kompletterande vridning ett kvarts varv i negativ riktning, absolutbeloppen skall inverteras...

K38

- a) Ledtråd: Se Exempeluppgift 3.3.1.2 i kurshäftet...
- b) Ledtråd: Se Exempeluppgift 3.3.1.2 i kurshäftet...
- c) Ledtråd: Se Exempeluppgift 3.3.1.2 i kurshäftet...

K39 Ledtråd: Sätt in  $re^{iu}$  respektive  $re^{iu}$  i uppgifterna...

Ö2.16 Ledtråd: Se Exempeluppgift 3.3.1.3 i kurshäftet...

Ö2.40

- a) Ledtråd: Se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet...
- b) Ledtråd: Skriv på normalform, sedan se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet...
- c) Ledtråd: Skriv på normalform, sedan se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet...
- d) Ledtråd: Skriv på normalform, sedan se exempel 3.8.1.4 i kurshäftet...

K35 Ledtråd: Faktorn  $e^{\ln 5 + i\pi} = e^{\ln 5} e^{i\pi} = 5(-1) \dots$

K36 Ledtråd: Ledtråd: Faktorn  $e^{1+i} = e^1 e^{i1}$  har absolutbeloppet  $e$  samt att argumentet  $1^\circ \approx 57^\circ$ ...

K37 Ledtråd: Två tal med samma argument ger alltid maximal summa vid addition medan två tal med motsatt argument alltid ger minimal summa...