

Teorifrågor kap. 2.2–5.2

Funktioner och dess grafer

- 1) Vad är en funktion?
- 2) Vad är den naturliga definitionsmängden – ge några exempel
- 3) Vad är en värdemängd?
- 4) Vad är en sammansatt funktion?
- 5) Varför kan cirkelns ekvation inte beskrivas med hjälp av *en* funktion
- 6) Ge exempel på funktioner som har sammanhängande funktionskurvor respektive flera osammanhängande kurvor.
- 7) Vad innebär det att en funktion är omvändbar?
- 8) Ange två synonymer till omvändbar.
- 9) Ange definitionen för strängt växande och strängt avtagande.
- 10) Visa att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ varken är strängt växande eller strängt avtagande.
- 11) Visa att funktionen $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ är avtagande men inte strängt avtagande.
- 12) Vad är skillnaden på växande respektive strängt växande?
- 13) Alla strängt växande och strängt avtagande funktioner = är omvändbar (= har invers). Dock så gäller inte att alla omvändbara funktioner är strängt växande eller strängt avtagande. Ge ett exempel på en funktion som har invers men varken är strängt växande eller strängt avtagande.
- 14) Vad betyder begränsad uppåt respektive begränsad neråt
- 15) Ge exempel på en funktion som är begränsad neråt men saknar minsta värde.
- 16) Härled samband 2.3 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 17) Härled samband 2.4 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 18) Härled samband 2.5 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 19) Härled samband 2.6 i läroboken för några låga positiva heltal utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 20) Vad medför egenskap IV (samband 2.7) för den naturliga logaritmens funktionsvärden?
- 21) Visa att naturliga logaritmen är strängt växande utifrån samband 2.4 och Egenskap IV.
- 22) Vilken ekvation beskriver enhetscirkeln
- 23) Varför finns ingen funktion som beskriver enhetscirkeln?
- 24) Om man vill beskriva enhetscirkeln enbart med hjälp av omvändbara funktioner krävs fyra stycken sådana – varför?
- 25) Varför är det praktiskt med vinkelmåttet radianer så att just 2π radianer motsvarar ett varv osv?
- 26) Vilken sats kan man säga att Trigonometriska Ettan är ett specialfall av?
- 27) Vilka är grundekvationerna (sid 94 o.s.v.) som ger övriga vinklar för ett unikt sinus-, cosinus- respektive tangensvärde?

Arcusfunktioner och Eulers formler

- 28) Inom vilka kvadranter finns de mest intressanta sinus-, cosinus och tangens-värdena – alltså de intervall inom vilka man senare definierar inverser?
- 29) Ange de restriktioner av trigfunktionerna (med definitionsmängder) som ger oss tillhörande arcusfunktionerna.
- 30) Ange tre arcusfunktioner med tillhörande definitions- och värdemängd (se 2.61-2.63)
- 31) För vilka värden gäller att $\arctan(\tan x) = x$ samt att $\arcsin(\sin x) = x$?
- 32) För vilka värden gäller att $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ samt att $\arccos(\cos x) = x$?
- 33) För vilka värden gäller att $\sin(\arcsin x) = x$ samt att $\cos(\arccos x) = x$?
- 34) För vilka värden gäller att $\tan(\arctan x) = x$ samt att $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$?
- 35) Tag fram Eulers formler för $\sin x$ och $\cos x$ med hjälp av Eulers första formel $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ och motsvarande konjugat.

Gränsvärden

- 36) Förklara allmänna gränsvärdesdefinitionen (Def. 3.2) med egna ord
- 37) Kan ett gränsvärde existera för ett visst x -värde utan att x -värdet tillhör definitionsmängden?
- 38) Vad betyder oegentligt gränsvärde?
- 39) Ge exempel på en funktion med oegentligt gränsvärde då $x \rightarrow 0$.
- 40) Vad betyder högergränsvärde respektive vänstergränsvärde?
- 41) Ge exempel på en funktion med olika, oegentliga, höger- och vänstergränsvärden då $x \rightarrow 0$.
- 42) Ge exempel på en funktion med $D_f =]0, \infty[$ och oegentligt högergränsvärden då $x \rightarrow 0 +$
- 43) Förklara sats 3.1 med egna ord (nollprodukt)
- 44) Utnyttja sats 3.1 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$
- 45) Förklara sats 3.2 med egna ord (summa, produkt och kvot)
- 46) Utnyttja sats 3.2 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$
- 47) Förklara sats 3.3 med egna ord (instängning)
- 48) Utnyttja sats 3.3 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(2x + \frac{1}{x}\right)$
- 49) För vilka värden gäller att $\sqrt{x^2} = |x| = x$ respektive $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
- 50) Ge exempel på när taktiken "bryta ut det dominerande" kan vara smart.
- 51) Ge exempel på när taktiken "förlänga med konjugatet till täljare eller nämnaren" kan vara smart.
- 52) Vilka fyra olika typer av gränsvärdesproblem (sid 133) vållar normalt problem?
- 53) Ge exempel på hur faktorsatsen hjälper oss att faktorisera polynom vid gränsvärdesproblem.

Kontinuitet

- 54) Vad är motsatsen till kontinuitet.
- 55) Hitta på en funktion som är vänsterkontinuerlig då $x = 2$ men ej är högerkontinuerlig.
- 56) Vad krävs för att en funktion skall vara kontinuerlig i en punkt?

- 57) Vad krävs för att en funktion skall vara kontinuerlig?
- 58) Skissa upp Heavisides språngfunktion (stegfunktion) och bestäm högergränsvärdet då $x \rightarrow 0^+$, vänstergränsvärdet då $x \rightarrow 0^-$ samt gränsvärdet då $x \rightarrow 0$ (om det existerar).
- 59) Vissa tror att Heavisides språngfunktion inte är kontinuerlig, trots att den är det (som den är definierad i Exempel 2.2 sid 61). Vari ligger tankefelet?
- 60) Kan man utvidga Heavisides språngfunktion med en punkt så att den blir kontinuerlig för *alla* x -värden?
- 61) Om en funktion är kontinuerlig, sammanhängande och strängt monoton på hela sin definitionsmängd – på vilket intervall gäller då detsamma för den tillhörande inversen?
- 62) Vissa tror att funktionen $\tan(x)$ inte är kontinuerlig trots att den är det. Vari ligger tankefelet?
- 63) Redogör för satsen om största och minsta värde.
- 64) Varför slutet intervall i denna sats?
- 65) Redogör för satsen om mellanliggande värde.
- 66) Redogör för följsatsen till denna.
- 67) Vad gäller för värdemängden hos en kontinuerlig funktion, om dess definitionsmängd är sluten och begränsad (kompakt)?

Standardgränsvärden

- 68) Ange några standardgränsvärden med värdet 1 samt skissa deras kurva med hjälp av <http://rechneronline.de/funktionsgraphen/>
- 69) Berätta hur den positiva basen a :s värde avgör gränsvärdet då $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- 70) Teckna två uttryck med gränsvärdet e .
- 71) På vilket sätt använder man ofta standardgränsvärden?
- 72) Sats 3.13 kan liknas vid en hastighetstabell och visar hur snabbt tre olika funktioner växer i förhållande till varandra då variabeln närmar sig oändligheten. Vilka tre funktioner jämförs och hur "snabba" är de jämfört med varandra?
- 73) Längre fram i kursen kommer vi att göra beräkningar med asymptoter. Vad är en asymptot?
- 74) Ge exempel på funktioner med en lodrät asymptot respektive flera lodräta asymptoter.
- 75) Ge exempel på funktioner med en respektive flera vågräta asymptoter.
- 76) Vid första anblicken tror många att funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ har en lodrätt asymptot i $x = 3$ vilket är fel. Vad har man i så fall missat att undersöka?
- 77) Funktionen $f(x) = 5x + 2 + \frac{1}{x}$ är exempel på en funktion med sned asymptot $y = 5x + 2$. Hur ser man det?
- 78) Undersök om funktionen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ har någon asymptot.

Derivatans definition

- 79) Härled derivatan till följande funktioner:
 $f(x) = 2x, f(x) = 3x^2, f(x) = 2x^3, f(x) = 3x^4, f(x) = \frac{5}{x}, f(x) = 5\sqrt{x}, f(x) = e^x,$
 $f(x) = \ln x, f(x) = \sin x$ och $f(x) = \cos x$
- 80) Förklara begreppet "deriverbar i en punkt".
- 81) Vad kallas gränsvärdet (svaret) hos differenskvoten i definitionen för deriverbarhet?

- 82) Vad skiljer hastighet och medelhastighet rent matematiskt?
83) Hur beräknas lutningen hos en tangent?

Bestämning av derivator

- 84) Formulera Kedjeregeln och vad gäller angående deriverbarhet för den inre respektive yttre funktionen?
85) Härled derivator till $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$ och $f(x) = \arctan x$ med hjälp av deras inverser + kedjeregeln.
86) Visa med en figur sambandet mellan derivator hos funktion och invers i speglade punkter
87) När man söker derivatan i en punkt (a, b) på inversens kurva kan denna bestämmas med hjälp av ordinarie funktion – hur?
88) Bestäm derivatan i punkterna $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ på enhetscirkeln – dels direkt med hjälp av kedjeregeln och cirkelns ekvation och därefter med hjälp av funktioner framtagna ur cirkelns ekvation.

Viktiga satser

- 89) Låt en funktion vara definierad på ett slutet intervall. Vad gäller för dess derivata i ändpunkterna?
90) Vad (enligt definition 4.3) är lokala maximi- och minimipunkter?
91) Vad är extrempunkter?
92) Ge exempel på funktioner som har en singulär punkt som ingår i en funktions definitionsmängd (!) och är singulära med avseende på derivatan.
93) Vad vet man om ”inre punkter som är extrempunkter till deriverbara funktioner”?
94) Vad är en stationär punkt (kritisk punkt)?
95) Vilka typer av extrempunkter finns det utöver stationära punkter hos kontinuerliga funktioner på slutna intervall?
96) Finns det stationära punkter som varken är lokal maximi- eller minimipunkt?
97) Vad säger Rolles sats (4.11)?
98) Vad säger medelvärdessatsen för derivator (4.10), även kallad differentialkalkylens medelvärdessats?
99) Varför måste funktionen vara deriverbar i dessa två satser? Visa med skiss hur satserna faller ex. då funktionen har singulär punkt (med avseende på derivatan) inom aktuellt intervall.
100) Vilken tydlig skillnad råder mellan medelvärdessatsen (4.10) och satsen om mellanliggande värde (3.9) vilka har namn som påminner om varandra?

Användning av derivator

- 101) Grafritning föregås med fördel av studie av funktionen i en tabell. Vad ingår vanligtvis i tabellen?
102) Vid kurvritning kompletterar man vanligtvis kurvor med tillhörande asymptoter. Vad är en asymptot?
103) Vissa funktioner kan man finna asymptoter till genom polynomdivision – vilka?
104) Hur finner man asymptoter till funktioner generellt?

- 105) Bland vilka tre typer av punkter söker man största och minsta värden och hur finner man dessa tre typer av punkter?

Derivator av högre ordning

- 106) Hur definieras andraderivatet och vad beskriver den?
107) Hur varierar andraderivatet vid olika typer av stationära och singulära punkter?
108) Vilket tecken har andraderivatet hos en konvex respektive konkav funktion?
109) Vad är en inflexionspunkt och hur söker man en sådan?
110) Ge exempel på funktioner som har en punkt med $f''(x) = 0$ utan att denna punkt är en inflexionspunkt.
111) Ge exempel på funktioner som har en inflexionspunkt utan att den samtidigt är en terrasspunkt.

Primitiva funktioner och partiell integration

- 112) Repetera reglerna i sats 5.2 och 5.3.
113) Bevisa sats 5.4 – sambandet för partiell integration.
114) Ge exempel på en integral som med fördel löses med hjälp av variabelsubstitution – alltså en sådan som man samtidigt kan lösa med hjälp av "Kedjeregeln baklänges".