

Teorifrågor kap. 2.2–5.2

Funktioner och dess grafer

- 1) Vad är en funktion?
- 2) Vad är den naturliga definitionsmängden – ge några exempel.
- 3) Vad är en värdemängd?
- 4) Vad är en sammansatt funktion?
- 5) Varför kan cirkelns ekvation inte beskrivas med hjälp av *en* funktion?
- 6) Ge exempel på funktioner som har sammanhängande funktionskurvor respektive flera osammanhängande kurvor.
- 7) Vad innebär det att en funktion är omvändbar?
- 8) Ange två synonymer till omvändbar.
- 9) Ange definitionen för strängt växande och strängt avtagande.
- 10) Visa att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ varken är strängt växande eller strängt avtagande.
- 11) Visa att funktionen $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ är avtagande men inte strängt avtagande.
- 12) Vad är skillnaden på växande respektive strängt växande?
- 13) Alla strängt växande och strängt avtagande funktioner = är omvändbar (= har invers). Dock så gäller inte att alla omvändbara funktioner är strängt växande eller strängt avtagande. Ge ett exempel på en funktion som har invers men varken är strängt växande eller strängt avtagande.
- 14) Vad betyder begränsad uppåt respektive begränsad neråt
- 15) Ge exempel på en funktion som är begränsad neråt men saknar minsta värde.
- 16) Härled samband 2.3 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 17) Härled samband 2.4 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 18) Härled samband 2.5 i läroboken utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 19) Härled samband 2.6 i läroboken för några låga positiva heltal utifrån egenskap III (= samband 2.2)
- 20) Vad medför egenskap IV (samband 2.7) för den naturliga logaritmens funktionsvärden?
- 21) Visa att naturliga logaritmen är strängt växande utifrån samband 2.4 och Egenskap IV.
- 22) Vilken ekvation beskriver enhetscirkeln
- 23) Varför finns ingen funktion som beskriver enhetscirkeln?
- 24) Om man vill beskriva enhetscirkeln enbart med hjälp av omvändbara funktioner krävs fyra stycken sådana – varför?
- 25) Varför är det praktiskt med vinkelmåttet radianer så att just 2π radianer motsvarar ett varv osv?
- 26) Vilken sats kan man säga att Trigonometriska Ettan är ett specialfall av?
- 27) Vilka är grundekvationerna (sid 94 o.s.v.) som ger övriga vinklar för ett unikt sinus-, cosinus- respektive tangensvärde?

Arcusfunktioner och Eulers formler

- 28) Inom vilka intervall respektive kvadranter i enhetscirkeln skapar man inverser till restiktioner av...
- $\sin x$
 - $\cos x$
 - $\tan x$
- 29) Ange de restriktioner av trigfunktionerna (med definitionsmängder) som ger oss tillhörande arcusfunktionerna.
- 30) Ange tre arcusfunktioner med tillhörande definitions- och värdemängd (se 2.61-2.63)
- 31) För vilka värden gäller att...
- $\arctan(\tan x) = x$
 - $\arcsin(\sin x) = x$
- 32) För vilka värden gäller att...
- $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$
 - $\arccos(\cos x) = x$
- 33) För vilka värden gäller att...
- $\sin(\arcsin x) = x$
 - $\cos(\arccos x) = x$
- 34) För vilka värden gäller att...
- $\tan(\arctan x) = x$
 - $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$
- 35) Tag fram Eulers formler för $\sin x$ och $\cos x$ med hjälp av Eulers första formel $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ och motsvarande konjugat.

Gränsvärden

- 36) Förklara allmänna gränsvärdesdefinitionen (Def. 3.2) med egna ord
- 37) Kan ett gränsvärde existera för ett visst x -värde utan att x -värdet tillhör definitionsmängden?
- 38) Vad betyder oegentligt gränsvärde?
- 39) Ge exempel på en funktion med oegentligt gränsvärde då $x \rightarrow 0$.
- 40) Vad betyder högergränsvärde respektive vänstergränsvärde?
- 41) Ge exempel på en funktion med olika, oegentliga, höger- och vänstergränsvärden då $x \rightarrow 0$.
- 42) Ge exempel på en funktion med $D_f =]0, \infty[$ och oegentligt högergränsvärden då $x \rightarrow 0^+$
- 43) Förklara sats 3.1 med egna ord (nollprodukt)
- 44) Utnyttja sats 3.1 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$
- 45) Förklara sats 3.2 med egna ord (summa, produkt och kvot)
- 46) Utnyttja sats 3.2 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$
- 47) Förklara sats 3.3 med egna ord (instängning)
- 48) Utnyttja sats 3.3 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(2x + \frac{1}{x}\right)$
- 49) För vilka värden gäller att $\sqrt{x^2} = |x| = x$ respektive $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
- 50) Ge exempel på när taktiken "bryta ut det dominerande" kan vara smart.

- 51) Ge exempel på när taktiken "förlänga med konjugatet till täljare eller nämnaren" kan vara smart.
- 52) Vilka fyra olika typer av gränsvärdesproblem (sid 133) kräver ytterligare utredning för att lösas?
- 53) Ge exempel på hur faktorsatsen hjälper oss att faktorisera polynom vid gränsvärdesproblem.

Kontinuitet

- 54) Vad är motsatsen till kontinuitet.
- 55) Hitta på en funktion som är vänsterkontinuerlig då $x = 2$ men ej är högerkontinuerlig.
- 56) Vad krävs för att en funktion skall vara kontinuerlig *i en punkt*?
- 57) Vad krävs för att en funktion skall vara kontinuerlig?
- 58) Skissa upp Heavisides språngfunktion (stegfunktion) och bestäm högergränsvärdet då $x \rightarrow 0^+$, vänstergränsvärdet då $x \rightarrow 0^-$ samt gränsvärdet då $x \rightarrow 0$ (om det existerar).
- 59) Vissa tror att Heavisides språngfunktion inte är kontinuerlig, trots att den är det (som den är definierad i Exempel 2.2 sid 61). Vari ligger tankefelet?
- 60) Kan man utvidga Heavisides språngfunktion med en punkt så att den blir kontinuerlig för *alla* x -värden?
- 61) Om en funktion är kontinuerlig, sammanhängande och strängt monotont på hela sin definitionsmängd så har den (enligt sats) en kontinuerlig invers. På vilket intervall är inversen definierad?
- 62) Vissa tror att funktionen $\tan(x)$ inte är kontinuerlig trots att den är det. Vari ligger tankefelet?
- 63) Redogör för satsen om största och minsta värde.
- 64) Varför kompakt intervall i denna sats?
- 65) Redogör för satsen om mellanliggande värde.
- 66) Varför gäller inte "följdsatsen till satsen om mellanliggande värde" om en funktion inte är kontinuerlig?
- 67) Vad gäller för värdemängden hos en kontinuerlig funktion, om dess definitionsmängd är sluten och begränsad (kompakt)? Något exempel?

Standardgränsvärden

- 68) Ange några standardgränsvärden med värdet 1 samt skissa deras kurva med hjälp av <http://rechneronline.de/funktionsgraphen/> eller <https://www.desmos.com/calculator>
- 69) Berätta hur den positiva basen a :s värde avgör gränsvärdet då $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- 70) Teckna två uttryck med gränsvärdet e .
- 71) På vilket sätt använder man ofta standardgränsvärden?
- 72) Sats 3.13 kan liknas vid en hastighetstabell och visar hur snabbt tre olika funktioner växer i förhållande till varandra då variabeln närmar sig oändligheten. Vilka tre funktioner jämförs och hur "snabba" är de jämfört med varandra?
- 73) Längre fram i kursen kommer vi att göra beräkningar med asymptoter. Vad är en asymptot?
- 74) Ge exempel på funktioner med en lodrät asymptot respektive flera lodräta asymptoter.
- 75) Ge exempel på funktioner med en respektive flera vågräta asymptoter.

- 76) Vid första anblicken tror många att funktionen $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ har en lodrätt asymptot i $x = 3$ vilket är fel. Vad har man i så fall missat att undersöka?
- 77) Funktionen $f(x) = 5x + 2 + \frac{1}{x}$ är exempel på en funktion med sned asymptot $y = 5x + 2$. Hur ser man det?
- 78) Undersök om funktionen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ har någon asymptot.

Derivatans definition

- 79) Härled derivatan till följande funktioner:
 $f(x) = 2x$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 2x^3$, $f(x) = 3x^4$, $f(x) = \frac{5}{x}$, $f(x) = 5\sqrt{x}$, $f(x) = e^x$,
 $f(x) = \ln x$, $f(x) = \sin x$ och $f(x) = \cos x$
- 80) Förklara begreppet "deriverbar i en punkt".
- 81) Vad kallas gränsvärdet (svaret) hos differenskvoten i definitionen för deriverbarhet?
- 82) Vad skiljer hastighet och medelhastighet rent matematiskt?
- 83) Hur beräknas lutningen hos en tangent?

Bestämning av derivator

- 84) Formulera Kedjeregeln och vad gäller angående deriverbarhet för den inre respektive yttre funktionen?
- 85) Härled derivator till $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$ och $f(x) = \arctan x$ med hjälp av deras inverser + kedjeregeln.
- 86) Visa med en figur sambandet mellan derivator hos funktion och invers i speglade punkter
- 87) När man söker derivatan i en punkt (a, b) på inversens kurva kan denna bestämmas med hjälp av ordinarie funktion – hur?
- 88) Bestäm derivatan i punkterna $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ på enhetscirkeln – dels direkt med hjälp av kedjeregeln och cirkelns ekvation och därefter med hjälp av funktioner framtagna ur cirkelns ekvation.

Viktiga satser

- 89) Låt en funktion vara definierad på ett slutet intervall. Vad gäller för dess derivata i ändpunkterna?
- 90) Vad (enligt definition 4.3) är lokala maximi- och minimipunkter?
- 91) Vad är extrempunkter?
- 92) Ge exempel på funktioner som har en singulär punkt som ingår i en funktions definitionsmängd (!) och är singulära med avseende på derivatan.
- 93) Vad vet man om "inre punkter som är extrempunkter till deriverbara funktioner"?
- 94) Vad är en stationär punkt (kritisk punkt)?
- 95) Vilka typer av extrempunkter finns det utöver stationära punkter hos kontinuerliga funktioner på slutna intervall?
- 96) Finns det stationära punkter som varken är lokal maximi- eller minimipunkt?
- 97) Vad säger Rolles sats (4.11)?

- 98) Vad säger medelvärdessatsen för derivator (4.10), även kallad differentialkalkylens medelvärdessats?
- 99) Varför måste funktionen vara deriverbar i dessa två satser? Visa med skiss hur satserna faller då funktionen har en singulär punkt (med avseende på derivatan) inom aktuellt intervall.
- 100) Varför måste funktionen vara kontinuerlig i dessa två satser? Visa med skiss hur satserna faller då funktionen har diskontinuitet inom aktuellt intervall.

Användning av derivator

- 101) Vid kurvritning kompletterar man vanligtvis kurvor med tillhörande asymptoter. Vad är en asymptot?
- 102) Varför måste även lodräta asymptoter sökas med hjälp av gränsvärdesstudie?
- 103) Till vissa funktioner kan man finna vågräta/sneda asymptoter genom polynomdivision – vilken typ av funktioner?
- 104) Hur finner man vågräta/sneda asymptoter till funktioner som inte kan polynomdivideras?
- 105) Bland vilka tre typer av punkter söker man största och minsta värden och hur finner man dessa tre typer av punkter?

Derivator av högre ordning

- 106) Hur definieras andraderivatan och vad beskriver den?
- 107) Vilka värden antar andraderivatan hos olika typer av stationära punkter samt vad gäller för andraderivatan i singulära punkter?
- 108) Vilket tecken har andraderivatan hos en strängt konvex respektive strängt konkav funktion? Även värdet noll i enstaka punkter?
- 109) Vad är en inflexionspunkt och hur söker man en sådan?
- 110) Ge exempel på funktioner som har en punkt med $f''(x) = 0$ utan att denna punkt är en inflexionspunkt.
- 111) Ge exempel på funktioner som har en inflexionspunkt utan att den samtidigt är en terrasspunkt.
- 112) Ge exempel på en funktion som har en stationär punkt av typen lokalt maximum utan att andraderivatan är negativ i denna punkt.
- 113) Funktionen $f(x) = x^4(x - 3)^2$ har lokala minimipunkter i två av de tre de stationära punkterna, nämligen i $x = 0$ och $x = 3$. Men andraderivatan påstås bara positiv i en av dessa två minimipunkter. Kan detta stämma?

Primitiva funktioner och partiell integration

- 114) Repetera reglerna i sats 5.2 och 5.3.
- 115) Bevisa sats 5.4 – sambandet för partiell integration.
- 116) Ge exempel på en integral som med fördel löses med hjälp av variabelsubstitution – alltså en sådan som man samtidigt kan lösa med hjälp av "Kedjeregeln baklänges".