Teorifrågor kap. 5.2–9.3

Repetition

1) Härled formeln för partiell integration ur nedanstående samband:
$$\frac{d}{dx}\big(F(x)g(x)\big) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

2) Vilken typ av elementär funktion brukar man oftast välja att derivera – alltså välja som $g(x)$ nedan – vid partiell integration?
$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

3) Ibland är det praktiskt att införa faktorn 1 vid partiell integration. I vilka fall?

4) Hur löser man integraler som har ”nämnarens derivata i täljaren” såsom:
$$\int 2\tan x\,dx = -2\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \cdots$$

Integrationsmetoder – variabelsubstitution och hantering av rationella uttryck

5) ”Kedjeregeln baklänges” (med hjälp av substitution) och vi skall beräkna den obestämda integralen
$$\int \cos(x^2)\,2x\,dx$$
Låt oss kalla $y = g(x) = x^2$ för den inre funktionen och $g'(x) = 2x$ för den *inre funktionens derivata.* I detta fall – då den *inre funktionens derivata* återfinns som en *faktor* intill den yttre funktionen – är variabelskifte en riktigt smart lösningstaktik.

Variabelskifte enligt $\begin{bmatrix} y = x^2 \\ \frac{dy}{dx} = 2x \\ dy = 2x\,dx \end{bmatrix}$ ger den betydligt enklare integralen:
$$\int \cos y\,dy$$
som är enkel att lösa.

Hitta på ytterligare några exempel som lämpar sig särskilt bra att lösa med hjälp av variabelbyte.

6) Vid partialbråksuppdelning skriver man om rationella uttryck (med lägre grad i täljaren än nämnaren) till flera men enklare sådana, vilka förhoppningsvis är enklare att finna primitiva

funktioner till. Efter lämplig ansats finns i huvudsak två standardmetoder för att finna partialbråken. Vilka två?

7) Partialbråksuppdelning med nedanstående ansats…

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} \quad , \quad x \neq -2 \text{ och } x \neq -4$$

…kan skrivas om enligt:

- *A* som fri term

$$\frac{1}{x+4} = A + \frac{B(x+2)}{x+4} \quad , \quad x \neq -4$$

- *B* som fri term

$$\frac{1}{x+2} = \frac{A(x+4)}{x+2} + B \quad , \quad x \neq -2$$

Om man på ett smart sätt väljer värde på x så kan *A* respektive *B* bestämmas. Hur?

8) När man bestämmer primitiv funktion till en integrand som är ett rationellt uttryck är följande metod med tre steg smart att använda:

I) Polynomdivision (om graden av täljaren ≥ graden av nämnaren)

II) Val av ansats enligt läroboken sid 252, tabellen anger ursprunglig nämnare q.

III) Partialbråksuppdelning (genom handpåläggning eller med hjälp av ekvationssystem)

Para ihop integrand (a–j) med förslag på start (I–X):

a) $\frac{5x+2}{(x+2)(x+5)}$

b) $\frac{x^3+2}{(x+2)(x+5)}$

c) $\frac{3x-7}{(x^2+2)(x+2)}$

d) $\frac{x+4}{(x+2)^2(x+5)}$

e) $\frac{x^2+9}{(x+2)(x+5)}$

f) $\frac{x^2+3x+5}{(x^2+2)(x+2)^2}$

g) $\frac{12}{(x+2)^3(x+5)}$

h) $\frac{x+3}{(x^2+4x+4)(x+5)}$

i) $\frac{48}{(x^3+6x^2+12x+8)(x+5)}$

j) $\frac{5x-3}{(x^2+4x+4)(x^2+10x+25)}$

k) $\frac{2x+3}{x^2+3x+9}$

I. Ansats: $\frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$

II. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5}$

III. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5}$

IV. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5}$

V. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+5}$

VI. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+5}$

VII. Ansats: $\frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x+2}$

VIII. $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2}$

IX. Polynomdivision först…

X. Polynomdivision först…

XI. Integreras direkt

9) Nedanstående två omskrivningar kan kännas långsökta men är ändå intressanta. Varför är omskrivningen smart och vilken division är lätt att glömma i nästa lösningssteg?

a.

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{\frac{x^2}{9}+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx \ldots$$

b.

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx \ldots$$

Integration av trigonometriskall uttryck och rottuttryck

10) Snarlika integrander som innehåller trigonometriskall uttryck kan kräva väldigt olika taktik när man vill finna deras primitiva funktioner. Para ihop (a–h) med en lämplig taktik (I – VIII):

a) $\int \cos x\,dx$

b) $\int \cos^2 x\,dx$

c) $\int \cos^3 x\,dx$

d) $\int \cos^4 x\,dx$

e) $\int \cos^5 x\,dx$

f) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

h) $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$

I. Taktik: Förlängning med $\cos x$, ”trigettan”, variabelbyte och partialbråksuppdelning

II. Taktik: Direkt primitiv funktion

III. Taktik: ”Trigformel dubbla vinkeln” eller Eulers formel eller partiell integration med ”deja vu”…

IV. Taktik: ”Trigettan” och variabelbyte…

V. Taktik: ”Trigformel dubbla vinkeln” två ggr eller Eulers formel…

VI. Taktik: ”Trigettan” och variabelbyte…

VII. Taktik: Förlängning med $\cos x$, ”trigettan”, variabelbyte och partialbråksuppdelning…

VIII. Taktik: Direkt primitiv funktion

11) I uppgift Ö6.24 (b) skall man beräkna $\int \frac{4}{5+4\sin x}\,dx$.
Till hjälp finner man exempel 5.35 på sid 265 i läroboken, med det till synes långsökta variabelbytet

$$y = \tan\frac{x}{2}$$

Undersök hur detta variabelbyte dessutom leder till följande värdefulla omskrivningar:

a) $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$ b) $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ c) $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

12) Vid integration med funktioner innehållande trigonometriska uttryck, kan man som bekant med fördel leta efter *inre funktioner* och särskilt *inre funktions derivata* (se kedjeregeln baklänges). Detta för att man, med ett smart variabelbyte, skall erhålla en integral som är enklare att lösa.

Studera följande:

$$\int 2e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \, dx$$

Ovan kan man med fördel välja variabelbytet $y = \sin^2 x$ baserat på den inre funktionen.

Fullfölj detta variabelbyte genom att bl.a. bestämma den inre funktionens derivata och upptäck att man erhåller klart enklare:

$$\int e^y \, dy$$

13) Repetera standardprimitiverna (g–k) i sats 5.2 på sid 239 i läroboken.

14) Studera de två lösningarna nedan, för beräkning av $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Båda metoderna är viktiga att behärska.

c. Lösningsmetod hämtad från föreläsning 1 med en inre funktion $1 - x^2$:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} y = 1 - x^2 \\ \frac{dy}{dx} = -2x \\ -dy = 2x\,dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$-2\sqrt{y} + C = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

d. Lösningsmetod hämtad föreläsning 2 med hjälp av trigettan:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} x = \sin y \\ \frac{dx}{dy} = \cos y \\ dx = \cos y\, dy \end{bmatrix} = \int \frac{2 \sin y \cos y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} dy$$

$$= \int \frac{2 \sin y \cos y}{\cos y} dy = \int 2 \sin y \, dy = -2\cos y + C$$

$$= -2\sqrt{1 - \sin^2 y} + C = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

Bestämda integraler

15) Förklara begrepp:
    e. Undertrappa
    f. Övertrappa
    g. Undersumma
    h. Översumma

16) Låt funktionen f vara definierad på det kompakta intervallet $[a, b]$. Vad gäller alltid för ”differensen mellan undersumma och översumma” förutsatt f skall vara integrerbar på detta intervall?

17) Om $f(x)$ är integrerbar då $x \in [a, b]$ så finns det exakt *ett* tal A sådant att följande olikhet alltid gäller:

$$\text{undersumman} = \int_a^b \Phi_n(x)dx \leq A \leq \int_a^b \Psi_n(x)dx = \text{översumman}$$

Vad kallas talet A och hur betecknas det? Se sats 6.1 (sid 278).

18) Repetera räknelagarna (a-e) i sats 6.2 (sid 279-280).

19) Sats 6.3 (sid 282) räcker ej för att visa att integralen $\int_0^\pi \sin x \, dx$ existerar; funktionen är nämligen inte monoton inom det aktuella intervallet. Vilken räknelag ur sats 6.2 (sid 279-280) måste sats 6.3 kompletteras med för att integralen skall kunna lösas?

Samband mellan integraler och derivator

20) Nämn en tillräcklig egenskap hos en funktion f för att den skall vara integrerbar på intervallet $x \in [a, b]$ – se sats 6.4 (sid 283).

21) Komplettera Medelvärdessatsen för integraler (sats 6.5) med en förtydligande figur.

22) Välj en valfri diskontinuerlig funktion och en tillhörande integral med givet svar (t.ex. bestående av räta linjer och genom att räkna rutor). Visa att Medelvärdessatsen för integraler (sats 6.5) inte gäller för diskontinuerliga funktioner genom att det önskade funktionsvärdet $f(\xi)$ i värsta fall kan saknas inom det aktuella intervallet $x \in [a, b]$.

23) Det vackra beviset av Analysens huvudsats (Sats 6.7 på sid 285) innehåller hänvisningar till olika satser och definitioner vilka tidigare tagits upp och därmed är användbara. Slå upp dessa i läroboken och kontrollera att du förstår varje mellanled i denna del av beviset:

$$S'(x) = \begin{bmatrix} \text{Enligt derivatans} \\ \text{definition} \\ \text{Definition 4.1} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(S(x+h) - S(x) \big)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt definitionen} \\ \text{av } S(x) \text{ i inledningen} \\ \text{av aktuell sats} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt räknelag} \\ \text{6.2 (e) för} \\ \text{integraler} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\xi) \big((x+h) - x \big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\xi)\, h$$

$$= \lim_{h \to 0} f(\xi) = \begin{bmatrix} \text{Tack vare} \\ \text{instängning av } \xi \\ \text{mellan } x \text{ och } x+h \end{bmatrix} = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Tack vare att f} \\ \text{är kontinuerlig inom} \\ \text{intervallet} \end{bmatrix} = f(x)$$

24) Vilka är förutsättningarna för att insättningsformeln (sats 6.8 på sid 287) skall gälla?

25) ”Krzysztofs formel” kallar vi denna formel

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

med den kontinuerliga funktionen $f(t)$ samt deriverbara funktionerna $\psi(x)$ och $\varphi(x)$ som variabla integrationsgränser. På vilket sätt är denna formel extra kraftfull jämfört med Analysens huvudsats?

26) Hur tar man fram Insättningsformeln (Sats 6.8) ur Analysens Huvudsats (Sats 6.7)?

27) Varför har man integrationsgränserna α och β istället för *a* och *b* i högerledet i sats 6.10?

Generaliserade integraler

28) Sats 6.4 (sid 283) säger ”om en funktion är *kontinuerlig* på ett *slutet och begränsat intervall (ett s.k. kompakt intervall)* så är funktionen *integrerbar* på detta intervall”; kontinuitet är ett *tillräckligt* villkor för integrerbarhet på ett kompakt intervall. På detta kompakta intervall följer automatiskt att funktionen begränsad. På vilka två sätt utvidgas denna sats genom införandet av generaliserade integraler i definition 6.6 (sid 301) och 6.7 (sid 303)?

29) En integrationsgräns $-\infty$ eller ∞ skall ej hanteras som ett tal i Insättningsformeln. Hur löser man detta?

30) I vilka olika fall sägs en generaliserad integral vara divergent?

31) Ibland måste en generaliserad integral delas upp i två eller flera integraler för att lösas, såsom i Exempel 6.22 (sid 305) och 6.23 (sid 306). Varför?

32) I Exempel 6.22 (sid 305) löses bara en av de två erhållna integralerna. Varför?

33) I Exempel 6.23 (sid 306) löses bara två av de fyra erhållna integralerna, trots konvergens. Varför?

34) På vilket sätt använder man vanligtvis jämförelsesats 10.11 (sid 456)?

Area och kurvlängd

35) Visa med en figur och Pythagoras sats att för en funktion $y(x)$ gäller att en delsträckas kurvlängd beskrivs av $ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx$ samt ange hur hela kurvlängden s beräknas.

36) Visa att längden av kurvan $y = x^2$ då $x \in [0, 1]$ ges av $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$

37) Visa att längden av kurvan $y = \ln(\cos x)$ då $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ges av $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx$

38) Visa att längden av kurvan $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ då $x \in [1, 2]$ ges av $\int_1^2 \left|4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right|\,dx$

39) Visa med en figur och Pythagoras sats att för parameterfunktioner $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ gäller att delsträckan $ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$ samt ange hur hela kurvlängden s beräknas.

40) I vilket sammanhang talas det om ”tak och golv” vi areaberäkning med hjälp av integraler?

Rotationskroppar

41) Låt en kon ha höjden h och radien r. Tag med hjälp av rotationskroppar fram formler för konens volym och mantelytans area.

42) Låt ett klot ha radien r. Tag med hjälp av rotationskroppar fram formler för klotets volym och klotytans area.

Intergraler och statistik

43) Vad är en täthetsfunktion (även kallad frekvensfunktion eller eng. density-function)? (se definition 1 i föreläsningsshäftet)

44) En fördelningsfunktion är alltid växande. Mellan vilka funktionsvärden och varför? (se definition 5, sats 6-7 i föreläsningsshäftet)

45) Varför använder man vanligtvis lilla x i beräkningarna när man har valt stora X för att beteckna en kontinuerlig stokastisk variabel?

46) Vad är en kvantil? (se definition 10 i föreläsningsshäftet)

47) Vad är övre, mellersta respektive nedre kvartilen? (se definition 11 i föreläsningsshäftet)

48) Ange någon likhet respektive skillnad mellan väntevärde och median.

49) Ange hur man utifrån en täthetsfunktion beräknar median respektive väntevärde för en kontinuerlig stokastisk variabel. (se definitioner 10, 11 och 14 i föreläsningsshäftet)

50) Vad är variansen ett mått på och hur beräknar man den för en kontinuerlig stokastisk variabel? (se definition 18 och sats 20 i föreläsningsshäftet)

51) Vad kallar man kvadratroten av variansen?

52) Vi vet att

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Studera hur man i föreläsningshäftet visar att:

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Maclaurin- och Taylorutveckling

53) Nämn några användningsområden för Maclaurin- och Taylorutvecklingar.

54) Vad skiljer Maclaurin- och Taylorutvecklingar?

55) Skissa kurvor för Maclaurin-polynom av grad 0, 1, 2 och 3 för $f(x) = \sin x$. Iakttagelser?

56) Skissa kurvor för Maclaurin-polynom av grad 0, 2 och 4 för $f(x) = \cos x$. Iakttagelser?

Differentialekvationer av ordning 1

57) Vad kännetecknar en differentialekvation?

58) Vad är *ordningen* av en differentialekvation?

59) Vad är *lösningen* av en differentialekvation?

60) Vad är ett riktningsfält?

61) Hur tar man fram en *integrerande faktor*?

62) På vilken form kan en *1:a ordningens linjär differentialekvation* alltid skrivas? (9.4 sid 382)

63) På vilken form kan en *1:a ordningens separabel differentialekvation* alltid skrivas? (sid 387)

Differentialekvationer av ordning 2

64) Bland *2:a* ordningens differentialekvationer tar vi inom kursen bara upp de med *konstant koefficienter*. Vad innebär det?

65) Sats 9.1 säger att om man har funnit *en lösning* y_p till en differentialekvation *2:a ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter* – alltså en ekvation av typen $y'' + ay' + by = f(x)$ – så finner man *samtliga lösningar* genom att lägga till de man erhåller då man löser den __?__.

66) Låt $y = Ce^{rx}$ (med åtföljande $y' = Cre^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$) vara en ansats till lösningar hos en ”homogen 2:a ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter”. *Utgå ifrån* differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 0$ och visa hur den s.k. karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4r + 3 = 0$ uppstår och samt den ger sökta värden på r.